

Ricci 流与球定理

Ricci Flow and the Sphere Theorem

Simon Brendle 著

顾会玲 张珠洪 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



Ricci流与球定理

Ricci Flow and the Sphere Theorem

Simon Brendle 著

顾会玲 张珠洪 译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

图书在版编目（CIP）数据

Ricci 流与球定理 /（德）布伦德（Brendle, S.）著；顾会玲，张珠洪译. -- 北京：高等教育出版社，2014. 2
（数学翻译丛书 / 丘成桐主编）
书名原文：Ricci flow and the sphere theorem
ISBN 978-7-04-039058-2

Ⅰ. ①R… Ⅱ. ①布… ②顾… ③张… Ⅲ. ①黎曼流形 Ⅳ. ①O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 300597 号

策划编辑 李华英　　责任编辑 李华英　　封面设计 王凌波　　版式设计 马敬茹
责任校对 王　雨　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	14	版　　次	2014 年 2 月第 1 版
字　　数	190 千字	印　　次	2014 年 2 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	59.00 元

物 料 号　39058-00

序言

本书中, 我们将研究在 Ricci 流下黎曼度量的发展方程。基于 Eells 和 Sampson [33] 在调和映射热流方面的前期工作, Hamilton [44] 在一篇有重大影响的文章中提出了该发展方程。利用 Ricci 流, Hamilton 证明了任何紧致的具有正 Ricci 曲率的三维流形一定微分同胚于空间球形式。从那时起, Ricci 流就被用来解决在黎曼几何和三维拓扑中长时间未被解决的公开问题。在本书中, 我们将主要考虑高维 Ricci 流的收敛性理论及其在微分球定理方面的应用。我们所叙述的结论都已经出现在研究文章中。尽管如此, 我们也努力运用不同的论证去简化和说明。

在第一章, 我们将给出在黎曼几何中不同的球定理的一个概述 (见 [22])。首先我们将描述 Berger 和 Klingenberg 的拓扑球定理。其次我们将讨论该定理的不同的推广, 比如 Grove 和 Shiohama [42] 的直径球定理以及 Micallef 和 Moore [60] 的球定理。他们的结果分别依赖于测地线和调和映射的变分理论。我们将探讨其证明过程中的主要想法, 但是, 这些知识在其他章节并没有用到。最后, 我们叙述由作者和 R. Schoen [20] 得到的微分球定理。

在第二章, 我们给出 Ricci 流的定义及其短时间存在性和唯一性理

论。我们将研究黎曼度量在 Ricci 流演化下其对应的黎曼曲率张量的变化情况, 这些发展方程是我们在后面章节作先验估计的基础。

在第三章, 我们将描述曲率张量的协变导数的 Shi 估计。作为一个应用, 我们将证明 Ricci 流在有限时间内不会产生奇点, 除非曲率变得无界。更进一步, 我们将建立线性抛物方程解的内估计。这些估计在第 4.3 节和 5.4 节将起到非常重要的作用。

在第四章, 我们考虑 S^2 上的 Ricci 流。在第 4.1 节, 我们证明 S^2 上任何的梯度 Ricci 孤立子都具有常曲率。然后, 我们研究 S^2 上具有正数量曲率的 Ricci 流的解。Hamilton [46] 的一个定理说明这样的解在伸缩变换后一定收敛于常曲率度量。该定理证明的一个关键因素就是 Hamilton 的熵泛函的单调性公式。该单调性公式将在第 4.2 节进行讨论。这个定理的另一个证明可在 [4, 6, 48] 和 [82] 中找到。[4] 和 [48] 的证明基于等周曲线的仔细的研究, 而 [6] 和 [82] 的证明依赖于偏微分方程的技巧。

在第五章, 我们叙述在 Ricci 流下 Hamilton 的极值原理, 并且给出夹集合的概念。然后, 我们叙述了 Ricci 流收敛性的一个一般准则。该准则由 Hamilton [45] 提出并在 Ricci 流的研究中发挥重大的作用。

在第六章, 我们将根据第五章中提到的一般理论, 解释 Hamilton 的具有正 Ricci 曲率的三维紧致流形的分类结果。然后, 我们描述 Hamilton 和 Ivey 的一个非常重要的曲率估计。该估计适用于三维 Ricci 流的任何解。

在第七章, 我们给出在 Ricci 流下保持的各种曲率条件。首先, 我们证明在所有维数中非负的迷向曲率在 Ricci 流下总是保持的。这个曲率条件最先由 Micallef 和 Moore 在其研究调和的二维球面的 Morse 指标的经典文章中提出, 它将在本书中起重要的作用。然后, 我们考虑 $M \times \mathbb{R}$ 具有非负迷向曲率的条件。这个条件比非负迷向曲率要强, 并且在 Ricci 流下也保持。类似地, 我们考虑 $M \times \mathbb{R}^2$ 具有非负迷向曲率的条件和 $M \times S^2(1)$ 具有非负迷向曲率条件。(这里, $S^2(1)$ 表示具有常曲率 1 的二维球面。) 我们证明这样的曲率条件在 Ricci 流下也保持。

在第八章, 我们给出微分球定理的证明。更一般地, 我们证明任何紧致的黎曼流形, 如果满足 $M \times \mathbb{R}$ 具有正的迷向曲率, 那么 M 一定微分同胚于空间球形式。这个结果是本章的主要结果。它可以看作是 Hamilton 的三维工作的推广, 其原始证明可参见 [17]。

在第九章, 我们将证明各种刚性定理。特别地, 我们将给出满足条件 "$M \times \mathbb{R}$ 具有非负迷向曲率" 的紧致黎曼流形 M 的完全分类。更进一步, 我们证明任何具有非负迷向曲率的 Einstein 流形一定是局部对称空间。这个结果推广了 Berger [10, 11] 和 Tachibana [84] 的经典结果。为了处理临界情况, 我们将利用 Bony 的关于退化椭圆型方程的极值原理。

在第二章至第九章中所呈现的结果中, 虽不全面, 但大部分是自成体系的。在第 2.2 节, 我们利用了抛物方程组的存在和唯一性理论。在第 4.2 节, 我们利用了由 Cheeger 和 Gromov 发展的关于黎曼流形的收敛性理论。最后, 在第九章, 我们利用了 Berger 的和乐群的分类以及关于 Kähler 流形和四元 Kähler 流形的一些基本的事实。

关于 Ricci 流理论, 还有一些很重要的结果并没有出现在这本书中。比如, 我们没有讨论 Hamilton 的微分 Harnack 不等式 (见 [47, 49]) 和 Perelman 的单调性公式 (见 [68, 69])。关于 Perelman 的熵泛函的细节部分可参考 [63, 85]。Hamilton 的 Harnack 不等式的推广可参考 [18] (或 [24])。

本书为作者在苏黎世联邦理工学院开设的一个文凭课程的讲义。在此我对苏黎世联邦理工学院数学系的热情招待表示衷心的感谢。我要特别感谢 Michael Struwe 教授和 Tristan Rivière 教授的许多启发性的讨论。没有他们的鼓励, 这本书将无法完成。最后, 感谢 Camillo De Lellis 教授在这本书的早期书写过程中提出的许多有益的意见。

目录

第一章　几何中的球定理概述

1.1　黎曼几何中的一些基本知识

假设 M 是一个 n 维光滑流形, g 是 M 上的黎曼度量. 对任意的向量场 X, Y, Z, M 上的 Levi-Civita 联络定义为

$$\begin{aligned}2g(D_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X).\end{aligned}$$

联络 D 称为是无挠的并且与度量是相容的, 若对任意的向量场 X, Y, Z

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

和

$$X(g(Y,Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z).$$

(M, g) 上的黎曼曲率张量定义为

$$g(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z, W) = -R(X, Y, Z, W).$$

所以, 如果记 $D^2_{X,Y}Z = D_X D_Y Z - D_{D_X Y}Z$, 则我们可得到

$$\begin{aligned} D^2_{X,Y}Z - D^2_{Y,X}Z &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z \\ &= -\sum_{k=1}^{n} R(X,Y,Z,e_k)e_k. \end{aligned}$$

(M,g) 上的 Levi-Civita 联络诱导了张量丛上的一个联络. 例如: 设 S 是一个 $(0,4)$ 型张量, 则对于任意的向量场 U,V,W,Z, 协变导数 $D_X S$ 可定义为

$$\begin{aligned} (D_X S)(U,V,W,Z) = X(S(U,V,W,Z)) \\ -S(D_X U,V,W,Z) - S(U,D_X V,W,Z) \\ -S(U,V,D_X W,Z) - S(U,V,W,D_X Z). \end{aligned}$$

并且, 我们可以定义 S 的二阶协变导数 $D^2_{X,Y}S$ 为

$$D^2_{X,Y}S = D_X D_Y S - D_{D_X Y}S.$$

注意到 $D^2_{X,Y}S$ 是 X 和 Y 的张量. 差值 $D^2_{X,Y}S - D^2_{Y,X}S$ 可以由 (M,g) 上的曲率张量表示出来. 例如: 设 S 是一个 $(0,4)$ 型张量, 则

$$\begin{aligned} &(D^2_{X,Y}S)(U,V,W,Z) - (D^2_{Y,X}S)(U,V,W,Z) \\ &= -S(D^2_{X,Y}U - D^2_{Y,X}U,V,W,Z) - S(U,D^2_{X,Y}V - D^2_{Y,X}V,W,Z) \\ &\quad -S(U,V,D^2_{X,Y}W - D^2_{Y,X}W,Z) - S(U,V,W,D^2_{X,Y}Z - D^2_{Y,X}Z), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &(D^2_{X,Y}S)(U,V,W,Z) - (D^2_{Y,X}S)(U,V,W,Z) \\ &= \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,U,e_k)S(e_k,V,W,Z) + \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,V,e_k)S(U,e_k,W,Z) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,W,e_k)S(U,V,e_k,Z) + \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,Z,e_k)S(U,V,W,e_k). \end{aligned}$$

最后, 张量场 S 的 Laplace 算子可以定义为

$$\Delta S = \sum_{k=1}^{n} D^2_{e_k,e_k}S,$$

其中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 M 上的局部单位正交标架.

黎曼曲率张量满足一定的代数等式. 我们不加证明地给出这些等式:

命题 1.1 对任意的向量场 X, Y, Z, W, 曲率张量满足:

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Z,W,X,Y); \tag{1}$$

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0. \tag{2}$$

等式 (2) 就是我们所熟悉的第一 Bianchi 恒等式.

由等式 (1), 我们可以认为 R 是 2-形式空间上的对称双线性型. 对任意点 $p \in M$, 曲率算子 $R: \wedge^2 T_pM \times \wedge^2 T_pM \to \mathbb{R}$ 定义为: 对任意的向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$,

$$R(X \wedge Y, Z \wedge W) = R(X,Y,Z,W).$$

定义 1.2 我们称 (M,g) 具有非负的曲率算子, 如果对任意点 $p \in M$, 任意 2-形式 $\varphi \in \wedge^2 T_pM$, 有 $R(\varphi,\varphi) \geqslant 0$.

定义 1.3 我们称 (M,g) 具有 2-非负的曲率算子, 如果对任意点 $p \in M$, 任意 2-形式 $\varphi, \psi \in \wedge^2 T_pM$ 满足 $|\varphi|^2 = |\psi|^2$, $\langle\varphi,\psi\rangle = 0$, 有 $R(\varphi,\varphi) + R(\psi,\psi) \geqslant 0$.

下面我们将回忆关于截面曲率的一些记号. 为此, 考虑点 $p \in M$ 和一个二维平面 $\pi \subset T_pM$. π 的截面曲率定义为

$$K(\pi) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{R(X \wedge Y, X \wedge Y)}{|X \wedge Y|^2},$$

其中 $\{X, Y\}$ 是 π 的一组基. 我们可以直接验证, 截面曲率的定义不依赖于基 $\{X, Y\}$ 的选取.

最后, 我们给出 Ricci 曲率和数量曲率的定义. 假设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 M 上的一组局部的单位正交标架, 则 (M,g) 上的 Ricci 张量定义为

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} R(X, e_k, Y, e_k).$$

(M, g) 上的数量曲率定义为 Ricci 曲率的迹, 即

$$\mathrm{scal} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_k, e_k).$$

(M, g) 的无迹 Ricci 张量定义为

$$\mathring{\mathrm{Ric}}(X, Y) = \mathrm{Ric}(X, Y) - \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\, g(X, Y).$$

下面我们将描述第二 Bianchi 恒等式, 这个等式是关于黎曼曲率张量的协变导数的:

命题 1.4 对任意的向量场 X, Y, Z, V, W, 我们有

$$(D_X R)(Y, Z, V, W) + (D_Y R)(Z, X, V, W) + (D_Z R)(X, Y, V, W) = 0.$$

由第二 Bianchi 恒等式, 我们可得到下面的关于 Ricci 张量的协变导数的关系:

命题 1.5 对任意的向量场 X, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} (D_{e_k}\mathrm{Ric})(X, e_k) = \frac{1}{2} X(\mathrm{scal}); \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (D_{e_k}\mathring{\mathrm{Ric}}\,)(X, e_k) = \frac{n-2}{2n} X(\mathrm{scal}). \tag{4}$$

证明 由第二 Bianchi 恒等式, 我们可得到

$$\begin{aligned} X(\mathrm{scal}) &= \sum_{k,l=1}^{n} (D_X R)(e_k, e_l, e_k, e_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} (D_{e_k} R)(X, e_l, e_k, e_l) + \sum_{k,l=1}^{n} (D_{e_l} R)(e_k, X, e_k, e_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (D_{e_k}\mathrm{Ric})(X, e_k) + \sum_{l=1}^{n} (D_{e_l}\mathrm{Ric})(X, e_l). \end{aligned}$$

易见, 等式 (3) 成立. 等式 (4) 是等式 (3) 的简单的推论. □

作为推论, 我们可以得到下面的经典结果, Schur 引理:

推论 1.6 设 (M,g) 是维数 $n \geqslant 3$ 的黎曼流形. 假设 (M,g) 的无迹 Ricci 张量为零, 那么存在某常数 ρ, 使得 $\mathrm{Ric} = \rho g$.

在本节的最后, 我们将讨论关于曲率夹的一些符号. 我们区别整体的和逐点的曲率夹:

定义 1.7 设 (M,g) 是一黎曼流形, $\delta \in (0,1)$. 我们称 (M,g) 是整体严格 δ-夹的, 如果 (M,g) 的截面曲率落在区间 $(\delta,1]$ 中. 我们称 (M,g) 是整体弱 δ-夹的, 如果 (M,g) 的截面曲率落在区间 $[\delta,1]$ 中.

定义 1.8 设 (M,g) 是一黎曼流形, $\delta \in (0,1)$. 我们称 (M,g) 是逐点严格 δ-夹的, 如果对任意点 $p \in M$, 任意的二维平面 $\pi_1,\pi_2 \subset T_pM$, 有 $0 < \delta K(\pi_1) < K(\pi_2)$. 我们称 (M,g) 是逐点弱 δ-夹的, 如果对任意点 $p \in M$, 任意的二维平面 $\pi_1,\pi_2 \subset T_pM$, 有 $0 \leqslant \delta K(\pi_1) \leqslant K(\pi_2)$.

M. Berger 建立了下面重要的不等式:

命题 1.9 (M. Berger [9]) 设 (M,g) 是一黎曼流形, p 是 M 上的任意一点. 假设对任意的二维平面 $\pi \subset T_pM$, 有 $\underline{\kappa} \leqslant K(\pi) \leqslant \overline{\kappa}$. 则对任意单位正交的 4-标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\} \subset T_pM$, 有

$$R(e_1,e_2,e_3,e_4) \leqslant \frac{2}{3}(\overline{\kappa} - \underline{\kappa}).$$

证明 我们首先将 $R(e_1,e_2,e_3,e_4)$ 表示为截面曲率的组合. 为此, 我们注意到

$$\begin{aligned}
&R(e_1+e_3,e_2+e_4,e_1+e_3,e_2+e_4) - R(e_1+e_3,e_2-e_4,e_1+e_3,e_2-e_4)\\
&-R(e_1-e_3,e_2+e_4,e_1-e_3,e_2+e_4) + R(e_1-e_3,e_2-e_4,e_1-e_3,e_2-e_4)\\
&= 8R(e_1,e_2,e_3,e_4) + 8R(e_1,e_4,e_3,e_2)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&R(e_1+e_4,e_2+e_3,e_1+e_4,e_2+e_3) - R(e_1+e_4,e_2-e_3,e_1+e_4,e_2-e_3)\\
&-R(e_1-e_4,e_2+e_3,e_1-e_4,e_2+e_3) + R(e_1-e_4,e_2-e_3,e_1-e_4,e_2-e_3)\\
&= 8R(e_1,e_2,e_4,e_3) + 8R(e_1,e_3,e_4,e_2).
\end{aligned}$$

第一式减去第二式, 并且利用第一 Bianchi 恒等式, 可得

$$
\begin{aligned}
& R(e_1+e_3,e_2+e_4,e_1+e_3,e_2+e_4)-R(e_1+e_3,e_2-e_4,e_1+e_3,e_2-e_4) \\
& -R(e_1-e_3,e_2+e_4,e_1-e_3,e_2+e_4)+R(e_1-e_3,e_2-e_4,e_1-e_3,e_2-e_4) \\
& -R(e_1+e_4,e_2+e_3,e_1+e_4,e_2+e_3)+R(e_1+e_4,e_2-e_3,e_1+e_4,e_2-e_3) \\
& +R(e_1-e_4,e_2+e_3,e_1-e_4,e_2+e_3)-R(e_1-e_4,e_2-e_3,e_1-e_4,e_2-e_3) \\
= & \ 16R(e_1,e_2,e_3,e_4)+8R(e_1,e_4,e_3,e_2)-8R(e_1,e_3,e_4,e_2) \\
= & \ 24R(e_1,e_2,e_3,e_4).
\end{aligned}
$$

由假设条件, (M,g) 的截面曲率落在区间 $[\overline{\kappa},\underline{\kappa}]$ 上, 因此, 我们有

$$
\begin{aligned}
R(e_1+e_3,e_2+e_4,e_1+e_3,e_2+e_4) &\leqslant 4\overline{\kappa}, \\
R(e_1+e_3,e_2-e_4,e_1+e_3,e_2-e_4) &\geqslant 4\underline{\kappa}, \\
R(e_1-e_3,e_2+e_4,e_1-e_3,e_2+e_4) &\geqslant 4\underline{\kappa}, \\
R(e_1-e_3,e_2-e_4,e_1-e_3,e_2-e_4) &\leqslant 4\overline{\kappa}, \\
R(e_1+e_4,e_2+e_3,e_1+e_4,e_2+e_3) &\geqslant 4\underline{\kappa}, \\
R(e_1+e_4,e_2-e_3,e_1+e_4,e_2-e_3) &\leqslant 4\overline{\kappa}, \\
R(e_1-e_4,e_2+e_3,e_1-e_4,e_2+e_3) &\leqslant 4\overline{\kappa}, \\
R(e_1-e_4,e_2-e_3,e_1-e_4,e_2-e_3) &\geqslant 4\underline{\kappa}.
\end{aligned}
$$

联立所有的式子, 我们得到 $24R(e_1,e_2,e_3,e_4)\leqslant 16(\overline{\kappa}-\underline{\kappa})$. 证明完毕. □

1.2 拓扑球定理

在整体微分几何中, 球定理具有悠久的历史, 可以追溯到 H. Hopf 提出的一个问题. 1951 年, H. E. Rauch [71] 证明了紧致、单连通的流形, 如果满足整体的 δ-夹条件, 那么它一定同胚于球面 ($\delta\approx 0.75$). 更进一步, Rauch 提出了这样的问题: 最优的夹常数是多少? 大约在 1960 年, M. Berger 和 W. Klingenberg 在他们的拓扑球定理中回答了该问题:

定理 1.10 (M. Berger [8]; W. Klingenberg [56]) 假设 (M,g) 是一个紧致、单连通的黎曼流形, 满足整体的严格 1/4-夹条件, 那么 M 同胚于 S^n.

定理 1.10 中的夹常数是最优的. 为此, 我们考虑流形 $\mathbb{CP}^m$, $\mathbb{HP}^m$ 和 $\mathbb{OP}^2$, 赋予标准度量. 这些流形都满足截面曲率在 1/4 和 1 之间, 并且它们是秩为 1 的紧致对称空间 (见 [53]).

M. Berger 给出了所有满足整体的弱 1/4-夹条件的紧致、单连通流形的分类.

定理 1.11 (M. Berger [8]) 假设 (M,g) 是一个紧致、单连通的黎曼流形, 满足整体的弱 1/4-夹条件, 那么 M 要么同胚于 S^n, 要么等距于对称空间.

定理 1.10 的证明依赖于比较几何中的技巧 (见 [26], 第 6 章), 也可参考 M. Gromov 的另一个证明 [34] (或见 [3]).

1.3 直径球定理

在这一节中, 我们讨论 Grove 和 Shiohama 的直径球定理. 本节中所呈现的论证依赖于 M. Berger ([26], 定理 6.13) 的关于测地线的变分理论.

引理 1.12 假设 (M,g) 是一完备黎曼流形, 点 q 是 M 上的一点. 设 $\gamma : (-\varepsilon, 0] \to M$ 是一条光滑曲线, 对任意 $s \in (-\varepsilon, 0]$, 有 $d(\gamma(s), q) \geqslant d(\gamma(0), q) + \mu s$. 那么存在向量 $v \in T_{\gamma(0)}M$ 使得 $\exp_{\gamma(0)}(v) = q$, $|v| = d(\gamma(0), q)$, 并且 $\langle \gamma'(0), v \rangle \geqslant -\mu |v|$.

证明 由 (M,g) 的完备性, 我们可得到: 存在向量 $v \in T_{\gamma(0)}M$ 使得 $\exp_{\gamma(0)}(v) = q$, $|v| = d(\gamma(0), q)$. 如果 $v = 0$, 则结论自然成立. 因此, 我们只需要考虑 $v \neq 0$ 的情况. 对所有 $s \in (-\varepsilon, 0]$, 我们可找到光滑映射 $\alpha : [0,1] \times (-\varepsilon, 0] \to M$, 满足 $\alpha(0, s) = \gamma(s)$, $\alpha(1, s) = q$, 并且对所有

$t \in [0,1], \alpha(t,0) = \exp_{\gamma(0)}(tv)$. 则

$$L(\alpha(\cdot,s)) \geqslant d(\gamma(s),q) \geqslant d(\gamma(0),q) + \mu s$$

对所有 $s \in (-\varepsilon, 0]$ 都成立, 并且该不等式在 $s = 0$ 时是最优的. 利用弧长的第一变分公式 (见 [26]), 我们可得到

$$-\frac{1}{|v|}\langle \gamma'(0), v\rangle = \frac{d}{ds}L(\alpha(\cdot,s))\Big|_{s=0} \leqslant \mu.$$

从而结论得证. □

引理 1.13 假设 (M,g) 是一完备黎曼流形, 点 q 是 M 上的一点. 设 $\gamma : [0,\varepsilon) \to M$ 是一条光滑曲线, 对任意 $s \in [0,\varepsilon)$, 有 $d(\gamma(s),q) \leqslant d(\gamma(0),q)+\mu s$. 那么存在向量 $v \in T_{\gamma(0)}M$ 使得 $\exp_{\gamma(0)}(v) = q$, $|v| = d(\gamma(0),q)$, 并且 $\langle \gamma'(0), v\rangle \geqslant -\mu|v|$.

证明 选取充分大的 k, 定义

$$s_k = \inf\left\{s \in [0,\varepsilon) : d(\gamma(s),q) \leqslant d(\gamma(0),q) + \left(\mu + \frac{1}{k}\right)s - \frac{1}{k^2}\right\}.$$

显然, $s_k \in \left(0, \frac{1}{k}\right]$. 并且对所有 $s \in [0, s_k]$ 有

$$d(\gamma(s),q) \geqslant d(\gamma(s_k),q) + \left(\mu + \frac{1}{k}\right)(s - s_k).$$

由引理 1.12 知, 存在向量 $v_k \in T_{\gamma(s_k)}M$, 使得 $\exp_{\gamma(s_k)}(v_k) = q$, $|v_k| = d(\gamma(s_k),q)$, 并且 $\langle \gamma'(s_k), v_k\rangle \geqslant -\left(\mu + \frac{1}{k}\right)|v_k|$. 令 $k \to \infty$, 我们可得结论成立. □

命题 1.14 假设 (M,g) 是 n 维的紧致黎曼流形, 具有截面曲率 $K \geqslant 1$. 假设 p,q 是 M 上的两点, 满足 $d(p,q) = \mathrm{diam}(M,g) > \frac{\pi}{2}$. 并且设 $\gamma : [0,1] \to M$ 是一测地线, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. 那么 γ 的 Morse 指标至少是 $n-1$.

证明 由假设知, 对所有 $s \in [0,1]$, 有 $d(\gamma(s),q) \leqslant d(\gamma(0),q)$. 利用引理 1.13, 可得: 存在向量 $v \in T_pM$ 使得 $\exp_p(v) = q$, $|v| = d(p,q)$, 并且 $\langle \gamma'(0), v\rangle \geqslant 0$.

断言: $L(\gamma) > \pi$. 我们利用反证法证明. 假设 $L(\gamma) \leqslant \pi$, 则由 Toponogov 定理 (见 [26], 定理 2.2B) 得

$$\begin{aligned}\cos(d(\gamma(1), q)) \geqslant &\cos(L(\gamma))\cos(d(\gamma(0), q))\\ &+ \sin(L(\gamma))\sin(d(\gamma(0), q))\cos(\measuredangle(\gamma'(0), v)).\end{aligned}$$

由假设条件知: $L(\gamma) \in (0, \pi]$, $d(\gamma(0), q) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. 并且由 $\langle\gamma'(0), v\rangle \geqslant 0$ 可得 $\cos(\measuredangle(\gamma'(0), v)) \geqslant 0$. 结合所有不等式, 我们得到

$$\cos(d(\gamma(1), q)) \geqslant \cos(L(\gamma))\cos(d(\gamma(0), q)) > \cos(d(\gamma(0), q)).$$

与 $\gamma(0) = \gamma(1)$ 矛盾! 所以 $L(\gamma) > \pi$.

记 $\mathscr{H}$ 是所有具有形式 $V(s) = \sin(\pi s)X(s)$ 的向量所形成的空间, 其中 X 是一沿 γ 的平行向量场并且对所有 $s \in [0, 1]$, 满足 $\langle\gamma'(s), X(s)\rangle = 0$. 则对所有 $V \in \mathscr{H}$, 有

$$\begin{aligned}I(V, V) &= \int_0^1 (|D_{\frac{d}{ds}} V(s)|^2 - R(\gamma'(s), V(s), \gamma'(s), V(s)))ds\\ &\leqslant (\pi^2 - L(\gamma)^2)\int_0^1 |V(s)|^2 ds.\end{aligned}$$

因为 $L(\gamma) > \pi$, I 限制在空间 $\mathscr{H}$ 上是负定的. 因此

$$\mathrm{ind}(\gamma) \geqslant \dim \mathscr{H} = n - 1. \qquad \square$$

结合命题 1.14 和关于测地线的变分理论, 我们可以得到下面的结论:

定理 1.15 (K. Grove, K. Shiohama [42]) 假设 (M, g) 是维数 $n \geqslant 4$ 的紧致黎曼流形, 具有截面曲率 $K \geqslant 1$, 直径 $\mathrm{diam}(M, g) > \frac{\pi}{2}$. 那么 M 微分同胚于 S^n.

证明 断言: M 是 $(n-1)$-连通的. 假设断言不成立, 则存在整数 $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ 使得 $\pi_k(M) \neq 0$. 固定两点 $p, q \in M$, 使 $d(p, q) = \mathrm{diam}(M, g) > \frac{\pi}{2}$. 因为 $\pi_k(M) \neq 0$, 所以存在测地线 $\gamma : [0, 1] \to M$ 使得 $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ 并且 $\mathrm{ind}(\gamma) < k$. 另一方面, 由命题 1.14 知 $\mathrm{ind}(\gamma) \geqslant n - 1$. 矛盾!

因此, M 是 $(n-1)$-连通的. 从而 M 是一同伦球. 由 Freedman 和 Smale 的结果知, M 同胚于 S^n (见 [36], 定理 1.6; [81], 定理 A). □

1.4 Micallef 和 Moore 的球定理

在这一节中, 我们将讨论 Micallef 和 Moore 关于定理 1.10 的一个推广. 假设 (M,g) 是维数 $n \geqslant 4$ 的黎曼流形, f 是从 S^2 到 M 的光滑映射. 在下面的讨论中, 我们总是假设 S^2 是 $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 通过球极投影得到的. 记 (x,y) 为 $\mathbb{R}^2$ 上的标准的笛卡儿坐标. f 的能量定义为

$$\mathscr{E}(f) = \frac{1}{2}\int_{S^2}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)dxdy.$$

映射 $f : S^2 \to M$ 称为是调和的, 如果 $D_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial f}{\partial x} + D_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

在这一节中, 我们始终假设映射 $f : S^2 \to M$ 是一个不恒为常数的调和映射. 这意味着 f 是泛函 $\mathscr{E}$ 的一个临界点. 并且, $\mathscr{E}$ 的二阶变分

$$\begin{aligned} I(W,W) &= \int_{S^2}\left[|D_{\frac{\partial}{\partial x}}W|^2 + |D_{\frac{\partial}{\partial y}}W|^2\right]dxdy \\ &\quad - \int_{S^2}\left[R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, W, \frac{\partial f}{\partial x}, W\right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, W, \frac{\partial f}{\partial y}, W\right)\right]dxdy \end{aligned}$$

对于所有的向量场 $W \in \Gamma(f^*(TM))$ 都成立. 其中, R 表示 (M,g) 的黎曼曲率张量.

对任意点 $p \in M$, 记 $T_p^{\mathbb{C}}M = T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 为 M 在点 p 的复化的切空间. 我们可延拓内积 $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ 成为一个复的双线性型 $g : T_p^{\mathbb{C}}M \times T_p^{\mathbb{C}}M \to \mathbb{C}$. 类似地, 黎曼曲率张量可延拓为复的多重线性型 $R : T_p^{\mathbb{C}}M \times T_p^{\mathbb{C}}M \times T_p^{\mathbb{C}}M \times T_p^{\mathbb{C}}M \to \mathbb{C}$.

接下来, 我们定义

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \in \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \in \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M)).$$

更进一步, 对于每个截面 $W \in \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M))$, 我们可定义

$$D_{\frac{\partial}{\partial z}} W = \frac{1}{2}(D_{\frac{\partial}{\partial x}} W - iD_{\frac{\partial}{\partial y}} W),$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W = \frac{1}{2}(D_{\frac{\partial}{\partial x}} W + iD_{\frac{\partial}{\partial y}} W).$$

因为 $f : S^2 \to M$ 是调和映射, 所以

$$D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{4}\Big(D_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial f}{\partial x} + D_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \frac{i}{4}\Big(D_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial f}{\partial y} - D_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial f}{\partial x}\Big) = 0.$$

从而, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 是从 $f^*(T^{\mathbb{C}}M)$ 的一个全纯截面.

我们可以延拓指标形式 $I : \Gamma(f^*(TM)) \times \Gamma(f^*(TM)) \to \mathbb{R}$ 到复的双线性形式 $I : \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M)) \times \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M)) \to \mathbb{C}$. 该复化形式可以写为:

命题 1.16 对每个截面 $W \in \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M))$, 我们有

$$I(W, \overline{W}) = 4 \int_{S^2} g(D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W, D_{\frac{\partial}{\partial z}} \overline{W}) dxdy - 4 \int_{S^2} R\Big(\frac{\partial f}{\partial z}, W, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \overline{W}\Big) dxdy.$$

证明 由指标形式 I 的定义知

$$\begin{aligned} I(W, \overline{W}) = &\int_{S^2} [g(D_{\frac{\partial}{\partial x}} W, D_{\frac{\partial}{\partial x}} \overline{W}) + g(D_{\frac{\partial}{\partial y}} W, D_{\frac{\partial}{\partial y}} \overline{W})] dxdy \\ &- \int_{S^2} \Big[R\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, W, \frac{\partial f}{\partial x}, \overline{W}\Big) + R\Big(\frac{\partial f}{\partial y}, W, \frac{\partial f}{\partial y}, \overline{W}\Big)\Big] dxdy. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} I(W, \overline{W}) = 2 &\int_{S^2} [g(D_{\frac{\partial}{\partial z}} W, D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \overline{W}) + g(D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W, D_{\frac{\partial}{\partial z}} \overline{W})] dxdy \\ -2 &\int_{S^2} \Big[R\Big(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, W, \frac{\partial f}{\partial z}, \overline{W}\Big) + R\Big(\frac{\partial f}{\partial z}, W, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \overline{W}\Big)\Big] dxdy. \end{aligned}$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 得

$$\begin{aligned} &\int_{S^2} \Big[g(D_{\frac{\partial}{\partial z}} W, D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \overline{W}) - g(D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W, D_{\frac{\partial}{\partial z}} \overline{W})\Big] dxdy \\ = &\int_{S^2} g(D_{\frac{\partial}{\partial z}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W - D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} D_{\frac{\partial}{\partial z}} W, \overline{W}) dxdy \\ = -&\int_{S^2} R\Big(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, W, \overline{W}\Big) dxdy \\ = &\int_{S^2} \Big[R\Big(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, W, \frac{\partial f}{\partial z}, \overline{W}\Big) - R\Big(\frac{\partial f}{\partial z}, W, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \overline{W}\Big)\Big] dxdy. \end{aligned}$$

联立所有的等式, 我们可得结论成立. □

命题 1.17 假设 $W \in \Gamma(f^*(T^{\mathbb{C}}M))$ 是全纯的, 则在 S^2 上的任意点有 $g\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W\right) = 0$. 特别地, 在 S^2 上的任意点有 $g\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$.

证明 由假设条件知 $D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\frac{\partial f}{\partial z} = D_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}W = 0$. 因此, 内积 $g\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W\right)$ 是 S^2 上的全纯函数. 从而 $g\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W\right)$ 为常数. 由于 f 是从 S^2 到 M 的光滑映射, 所以截面 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 S^2 上的北极点上等于 0. 这意味着在 S^2 上的北极点函数 $g\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W\right) = 0$. 故在 S^2 上的任意一点 $g\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W\right) = 0$. □

命题 1.18 存在子丛 $E \subset f^*(T^{\mathbb{C}}M)$ 使得 $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}E \geqslant n-2$, $c_1(E) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} \notin \Gamma(E)$.

证明 利用 Grothendieck [40] 的结果知, 存在全纯线丛 $L_1, \cdots, L_n \subset f^*(T^{\mathbb{C}}M)$ 使得 $f^*(T^{\mathbb{C}}M) = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n$. 我们假设线丛 $L_1, \cdots, L_n$ 满足

$$c_1(L_1) \geqslant c_1(L_2) \geqslant \cdots \geqslant c_1(L_n).$$

线丛 $L_1, \cdots, L_n$ 不是唯一的. 尽管如此, 它们的陈类序列 $c_1(L_1), \cdots, c_1(L_n)$ 是唯一决定的 (这个不依赖于线丛 $L_1, \cdots, L_n$ 的选取).

注意到 $f^*(T^{\mathbb{C}}M)$ 是实向量丛的复化, 所以丛 $f^*(T^{\mathbb{C}}M)$ 同构于其对偶丛, 即同构于 $L_n^* \oplus L_{n-1}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*$. 由于陈类序列是唯一的, 所以我们有

$$c_1(L_k) = c_1(L_{n-k+1}^*) = -c_1(L_{n-k+1})$$

对所有的 $k = 1, \cdots, n$ 成立.

我们记 $\frac{\partial f}{\partial z} = W_1 + \cdots + W_n$, 其中 $W_j \in \Gamma(L_j)$, $j = 1, \cdots, n$. 因为 f 不恒为常数, 那么存在整数 $k \in \{1, \cdots, n\}$ 使得 W_k 不恒为 0. 定义 $E = \bigoplus_{j \in J} L_j$, 其中 $J = \{1, \cdots, n\} \setminus \{k, n-k+1\}$. 可以直接验证 E 满足所有的性质, 即是我们所需要的. □

定理 1.19 (M. Micallef, J. D. Moore [60]) 假设 (M, g) 是维数 $n \geqslant 4$ 的黎曼流形. 对所有点 $p \in M$, 所有线性无关的向量 $\zeta, \eta \in T_p^{\mathbb{C}}M$ 满足

$g(\zeta,\zeta) = g(\zeta,\eta) = g(\eta,\eta) = 0$, 有 $R(\zeta,\eta,\overline{\zeta},\overline{\eta}) > 0$. 另外, 还假设 $f : S^2 \to M$ 是一非恒为常数的调和映射. 那么, f 的 Morse 指标最少是 $\left[\dfrac{n-2}{2}\right]$.

证明 设 $E \subset f^*(T^{\mathbb{C}}M)$ 是由命题 1.18 所构造的全纯子向量丛, $\mathscr{H}$ 是 E 的所有全纯截面形成的空间. 任给两个截面 $W_1, W_2 \in \mathscr{H}$, 则内积 $g(W_1, W_2)$ 是 S^2 上的全纯函数. 因此, 函数 $g(W_1, W_2)$ 是常值函数. 这给出了复的双线性型

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C},\ (W_1, W_2) \mapsto g(W_1, W_2).$$

由黎曼–罗赫定理知 $\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H} \geqslant n-2$. 所以, 存在子空间 $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ 使得 $\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H}_0 \geqslant \left[\dfrac{n-2}{2}\right]$, 并且对所有 $W \in \mathscr{H}_0$, 有 $g(W, W) = 0$.

现在考虑任意的截面 $W \in \mathscr{H}_0$. 因为 W 是全纯的, 由命题 1.17 知在 S^2 上的任意点有 $g\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = g\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}, W\right) = 0$. 并且在 S^2 上的任意点有 $g(W, W) = 0$. 利用曲率的假设条件, 我们有

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \overline{W}\right) \geqslant 0,$$

当且仅当 $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 和 W 线性相关时等号成立. 由于 W 是全纯的, 根据命题 1.16,

$$I(W, \overline{W}) = -4\int_{S^2} R\left(\frac{\partial f}{\partial z}, W, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \overline{W}\right)dxdy \leqslant 0.$$

下面分析等式成立的情况. 如果 $I(W, \overline{W}) = 0$, 那么存在亚纯函数 $\psi : S^2 \to \mathbb{C}$ 使得 $W = \psi\dfrac{\partial f}{\partial z}$. 由于 $W \in \Gamma(E)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} \notin \Gamma(E)$, 所以函数 $\psi \equiv 0$. 从而, 对任意非零截面 $W \in \mathscr{H}_0$, 我们有 $I(W, \overline{W}) < 0$.

下面我们将完成定理 1.19 的证明. 假设 f 的 Morse 指标 $m < \left[\dfrac{n-2}{2}\right]$, 则 $\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H}_0 \geqslant \left[\dfrac{n-2}{2}\right] > m$. 从而, 存在非零的截面 $W \in \mathscr{H}_0$, 使得它正交于二阶变分算子的前 m 个特征函数. 由于 $W \in \mathscr{H}_0$, 所以 $I(W, \overline{W}) < 0$. 另一方面, 由于 W 正交于二阶变分算子的前 m 个特征函数, 所以 $I(W, \overline{W}) \geqslant 0$. 矛盾! □

联立定理 1.19 和调和映射的变分理论 (见 [75]), 我们可以得到如下的结论:

定理 1.20 (M. Micallef, J. D. Moore [60]) *设 (M,g) 是一个紧致、单连通的黎曼流形, 维数 $n \geqslant 4$. 假设对所有点 $p \in M$, 所有线性无关的向量 $\zeta,\eta \in T_p^{\mathbb{C}}M$ 满足 $g(\zeta,\zeta) = g(\zeta,\eta) = g(\eta,\eta) = 0$, 有 $R(\zeta,\eta,\overline{\zeta},\overline{\eta}) > 0$. 则 M 同胚于 S^n.*

证明 断言: M 是 $(n-1)$-连通的. 假设断言不成立, 则存在整数 $k \in \{2,\cdots,n-1\}$ 使得 $\pi_k(M) \neq 0$, 并且 $\pi_j(M) = 0$, 对所有的 $j = 1,\cdots,k-1$ 成立. 利用 Hurewicz 定理 (见 [16], 第 VII 章, 推论 10.8), 我们可以得到 $H_k(M,\mathbb{Z}) \neq 0$, $H_j(M,\mathbb{Z}) = 0$, 对所有的 $j = 1,\cdots,k-1$ 成立. 因此, 利用关于上同调的万能系数定理可得 $H^j(M,\mathbb{Z}) = 0$, 对所有的 $j = 1,\cdots,k-1$ 成立 (见 [16], 第 V 章, 推论 7.3). 利用 Poincaré 对偶 (见 [16], 第VI章, 推论 8.4) 可得 $H_{n-j}(M,\mathbb{Z}) = 0$, 对所有的 $j = 1,\cdots,k-1$ 成立. 由于 $H_k(M,\mathbb{Z}) = 0$, 所以 $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

下面我们利用调和二维球的存在性定理. 由于 $k \geqslant 2$, $\pi_k(M) \neq 0$, 则存在不恒为常数的调和映射 $f: S^2 \to M$ 具有 Morse 指标 $\leqslant k-1$ (见 [75], 第 VII 章, 定理 2). 另一方面, 由定理 1.19 知 f 的 Morse 指标 $\geqslant \left[\frac{n-2}{2}\right]$. 结合所有的事实, 得到 $k > \left[\frac{n}{2}\right]$. 矛盾!

因此, M 是 $(n-1)$-连通的. 从而, M 是同伦球. 利用 Freedman [36] 和 Smale [81] 的结果得到: M 同胚于 S^n. □

1.5 怪球和微分球定理

大家熟知, 存在某些光滑流形, 它们与 S^n 是同胚的, 但不是微分同胚. 这种怪球最初的例子是在 1956 年由 J. Milnor 构造的:

定理 1.21 (J. Milnor [62]) *存在光滑流形 M, 同胚但不微分同胚于 S^7.*

由定理 1.21 的结果, 我们很自然地问, 在整体意义下严格 1/4-夹的紧致、单连通流形是否微分同胚于 S^n? 这就是著名的微分球定理并且已被广泛研究. 在这个方面的第一个结果是在 1966 年由 D. Gromoll

[38] 和 E. Calabi 得到的. Gromoll 证明任何紧致、单连通的黎曼流形, 如果满足在整体意义下的 $\delta(n)$-夹条件, 那么它一定微分同胚于 S^n, 其中夹常数 $\delta(n)$ 仅仅依赖于维数, 并且当 $n \to \infty$ 时, $\delta(n) \to 1$. 1977 年, M. Sugimoto, K. Shiohama 和 H. Karcher [83] 得到了一个类似的结果, 只不过夹常数不依赖于维数 n ($\delta = 0.87$). 后来, 夹常数分别被 E. Ruh [72] ($\delta = 0.80$) 以及 K. Grove, H. Karcher 和 E. Ruh [41] ($\delta = 0.76$) 改进. 并且 E. Ruh [73] 证明了在逐点夹条件下的微分球定理, 但是当 $n \to \infty$ 时, 夹常数 $\to 1$.

利用 Ricci 流, R. Hamilton 证明了下面的经典结果:

定理 1.22 (R. Hamilton [44]) *假设 (M, g) 是一个三维紧致黎曼流形, 具有正的 Ricci 曲率, 那么 M 微分同胚于空间球形式.*

定理 1.22 的证明将在第 6.1 节给出. 关键的想法是用 Ricci 流来发展度量 g, 并且证明通过伸缩后的度量最终收敛于一具有常截面曲率的度量. 该证明依赖于合适的逐点曲率估计, 而这个曲率估计是从极值原理得到的.

在高维情形, 关于 Ricci 流, 许多学者得到了不同的收敛性结果. 这些结果都是基于 R. Hamilton 的奠基性的工作 [44, 45] 的一般框架结构上. G. Huisken [54] 证明了 Ricci 流能将充分夹曲率的度量发展到常曲率度量. C. Margerin [57] 和 S. Nishikawa [65] 也得到了类似的结果. 在四维情形, R. Hamilton [45] 对于初始度量具有正曲率算子的情形, 证明了一个收敛性定理. C. Böhm 和 B. Wilking [14] 将该结果推广到了任意的维数. 在这方面的另一些重要的结果是由 B. Andrews 和 H. Nguyen [5], H. Chen [28] 以及 C. Margerin [58] 得到的.

A. Chang, M. Gursky 和 P. Yang [25] 在四维时证明了一个共形不变的球定理. 该结果仅仅需要假设一个积分形式的夹条件; 并且, 夹常数是最优的. 证明依赖于共形几何的技巧和 Ricci 流. 关键的想法是在同一个共形类中形变给定的度量, 使得最终满足 Margerin 的定理 [58] 中的条件. 然后 Ricci 流便能形变该度量到一常截面曲率的度量.

2007 年, 本书作者和 R. Schoen 证明了微分球定理, 其中夹常数是最优的 ($\delta = 1/4$). 该结果是下面这个更一般结果的特殊情形:

定理 1.23 (S. Brendle [17]) 假设 (M, g) 是维数 $n \geqslant 4$ 的紧致黎曼流形, 并假设对所有点 $p \in M$, 所有线性无关的向量 $\zeta, \eta \in T_p^{\mathbb{C}} M$, $g(\zeta, \zeta) g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2 = 0$, 有 $R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) > 0$, 则 M 微分同胚于空间球形式.

利用命题 1.9, 我们可以证明任何满足逐点严格 1/4-夹的流形 (M, g) 一定满足定理 1.23 中的曲率条件. 从而, 我们可得到下面的结果, 该结果最先在 [20] 中证明:

推论 1.24 (S. Brendle, R. Schoen [20]) 假设 (M, g) 是维数 $n \geqslant 4$ 的紧致黎曼流形, 具有逐点严格的 1/4-夹曲率, 那么 M 微分同胚于空间球形式.

最后, 我们得到如下的刚性结果:

定理 1.25 (S. Brendle, R. Schoen [21]) 假设 (M, g) 是维数 $n \geqslant 4$ 的紧致黎曼流形, 具有逐点弱的 1/4-夹曲率, 那么 M 要么微分同胚于空间球形式, 要么等距于一局部对称空间.

利用 [21] 中的结果, P. Petersen 和 T. Tao [70] 对满足几乎 1/4-夹条件的流形给出了分类.

定理 1.23 的证明利用了 Ricci 流, 其证明将在第 8.4 节给出. 定理 1.25 的证明将在第 9.8 节给出.

第二章 Hamilton Ricci 流

2.1 定义和特殊解

在本节中,我们将给出 Ricci 流的定义,并讨论一些基本的例子.

定义 2.1 假设 M 是一流形. $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上的一族单参数的度量. 我们称 $g(t)$ 是 Ricci 流的解, 如果

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}.$$

在这一节的剩下部分,我们将讨论关于 Ricci 流的一些特殊的解.

2.1.1 Einstein 流形

设 (M, g_0) 是一黎曼流形. 我们称 g_0 是 Einstein 度量, 如果存在常数 ρ 使得 $\operatorname{Ric}_{g_0} = \rho g_0$. 在这种情况下, 度量

$$g(t) = (1 - 2\rho t) g_0$$

是 Ricci 流的一个解.

2.1.2 Ricci 孤立子

设 (M, g_0) 是一黎曼流形. 我们称 (M, g_0) 是 Ricci 孤立子, 如果存在常数 ρ, 向量场 ξ, 使得

$$\mathrm{Ric}_{g_0} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_\xi g_0 = \rho g_0,$$

其中 $\mathscr{L}_\xi g_0$ 是 g_0 沿着向量场 ξ 的 Lie 导数. 根据 ρ 的符号, 我们将一个 Ricci 孤立子称为收缩的 ($\rho > 0$), 稳定的 ($\rho = 0$), 或者膨胀的 ($\rho < 0$). 如果向量场 ξ 是某个函数的梯度, 那么我们称 (M, g_0) 是梯度 Ricci 孤立子.

假设 (M, g_0) 是 Ricci 孤立子. 对任意点 $p \in M$, 我们记 $\varphi_t(p)$ 是以 $\varphi_0(p) = p$ 为初值的常微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \frac{1}{1 - 2\rho t}\xi|_{\varphi_t(p)}$$

的唯一解. 这样就定义了一族单参数的微分同胚 $\varphi_t : M \to M$. 从而度量

$$g(t) = (1 - 2\rho t)\varphi_t^*(g_0)$$

形成了 Ricci 流的一个解.

2.1.3 Cigar 孤立子

关于 Ricci 孤立子 的一个最简单的例子就是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Cigar 孤立子. 对每个 $t \in (-\infty, \infty)$, 我们定义 $\mathbb{R}^2$ 上任意一点 x 处的度量 $g(t)$ 为

$$g_{ij}(t) = \frac{4}{e^t + |x|^2}\delta_{ij}.$$

则 $g(t)$ 的数量曲率是

$$\mathrm{scal}_{g(t)} = \frac{e^t}{e^t + |x|^2}.$$

这意味着

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -\,\mathrm{scal}_{g(t)}g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

因此, 对每个 $t \in (-\infty, \infty)$, 度量 $g(t)$ 是 Ricci 流的一个解. 并且我们有 $g(t) = \varphi_t^*(g(0))$, 其中 $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $\varphi_t(x) = e^{-\frac{t}{2}}x$. 所以 $g(0)$ 是稳定的 Ricci 孤立子.

2.1.4 Rosenau 解

在 S^2 上存在一个有趣的闭形式的解. 对每个 $t \in (-\infty, 0)$, 我们定义 $\mathbb{R}^2$ 上任意一点 x 处的度量 $g(t)$ 为

$$g_{ij}(t) = \frac{8\sinh(-t)}{1 + 2\cosh(-t)|x|^2 + |x|^4}\delta_{ij}.$$

注意到 $g(t)$ 可光滑地延拓到 S^2 上的一个度量. 数量曲率为

$$\mathrm{scal}_{g(t)} = \frac{\cosh(-t)}{\sinh(-t)} - \frac{2\sinh(-t)|x|^2}{1 + 2\cosh(-t)|x|^2 + |x|^4}.$$

这意味着

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -\,\mathrm{scal}_{g(t)}g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

因此, 上述度量 $g(t), t \in (-\infty, 0)$, 是 Ricci 流的一个解.

2.2 短时间存在性和唯一性

在这一节中, 我们将描述关于 Ricci 流解的短时间存在性和唯一性定理. 该定理是 1982 年首先由 Hamilton 给出的. 这个结果的证明是非常巧妙的, 因为 Ricci 流方程并不是严格抛物的. 为了克服这个障碍, Hamilton 利用了 Nash-Moser 的反函数定理. 接着 DeTurck [32] 给出了定理 2.8 的另一个证明, 在这个证明中, 并没有用到 Nash-Moser 的反函数定理. 在这一节剩下的部分, 我们将简要给出 DeTurck 证明的主要想法 (见 [49], 第 6 节). 我们首先给出定义:

定义 2.2 假设 f 是从黎曼流形 (M, g) 到 (N, h) 的一个光滑映射. 则 f 的调和映射 Laplace 算子定义为

$$\Delta_{g,h}f = \sum_{k=1}^{n}(D_{e_k}df)(e_k),$$

其中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 (M, g) 上的一组局部单位正交标架. 这里微分 df 可看作是向量丛 $TM^* \otimes f^*(TN)$ 的一个截面, D 是向量丛上的诱导的联络. 注意 $\Delta_{g,h}f$ 是向量丛 $f^*(TN)$ 的一个截面.

显然地, 调和映射 Laplace 算子在 M 的微分同胚群的作用下是不变的.

引理 2.3 设 f 是从黎曼流形 (M,g) 到 (N,h) 的一个光滑映射, φ 是从 M 到其自身的一个微分同胚. 则对任意点 $p\in M$, 有

$$(\Delta_{\varphi^*(g),h}(f\circ\varphi))|_p=(\Delta_{g,h}f)|_{\varphi(p)}\in T_{f(\varphi(p))}N.$$

为证明 Ricci 流在短时间内存在唯一解, 我们用一个严格抛物型方程代替 Ricci 流, 这就是众所周知的 Ricci-DeTurck 流.

定义 2.4 假设 M 是一个紧致流形, h 是 M 上一个固定的度量. 假设 $\tilde{g}(t), t\in[0,T)$, 是 M 上的一族单参数的黎曼度量. 我们称 $\tilde{g}(t)$ 是 Ricci-DeTurck 流的一个解, 如果

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t)=-2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)}-\mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t),$$

其中 $\xi_t=\Delta_{\tilde{g}(t),h}\mathrm{id}$.

Ricci 流仅仅是一弱抛物的, 而 Ricci-DeTurck 流则是一严格抛物的. 因此我们可以得到 Ricci-DeTurck 流的存在唯一性定理:

命题 2.5 假设 M 是一个紧致流形, h 是 M 上一个固定的度量. 任意给定初始度量 g_0, 则存在实数 $T>0$ 和一族光滑的单参数度量 $\tilde{g}(t), t\in[0,T)$, 使得 $\tilde{g}(t)$ 是以 $\tilde{g}(0)=g_0$ 为初值的 Ricci-DeTurck 流的解. 并且, 解 $\tilde{g}(t)$ 是唯一的.

证明 在局部坐标系下, $\tilde{g}$ 的 Ricci 张量可表示为

$$\mathrm{Ric}_{\tilde{g}}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl}-\partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk}-\partial_j\partial_k\tilde{g}_{il}+\partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j\otimes dx^l$$
$$+\ \text{低阶项}.$$

并且, 向量场 $\xi=\Delta_{\tilde{g},h}\mathrm{id}$ 可以表示为

$$\xi=\sum_{i,k,l=1}^{n}\tilde{g}^{ik}((\Gamma^h)_{ik}^l-(\Gamma^{\tilde{g}})_{ik}^l)\partial_l,$$

其中 $\Gamma^{\tilde{g}}$ 和 Γ^h 分别是 $\tilde{g}$ 和 h 的联络系数. 这意味着

$$\xi = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{jl}(\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_k\tilde{g}_{ij} - \partial_j\tilde{g}_{ik})\partial_l \\ + \text{低阶项}.$$

由此我们可以得到

$$\mathscr{L}_\xi\tilde{g} = -\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j \otimes dx^l \\ + \text{低阶项}.$$

因此

$$-2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} - \mathscr{L}_\xi\tilde{g} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l \\ + \text{低阶项}.$$

由此可见, Ricci-DeTurck 流是严格抛物型方程. 因此, 由严格抛物型方程组解的标准的存在唯一性定理可知结论成立. □

在 Ricci 流的解和 Ricci-DeTurck 流的解之间存在着一一对应关系. 首先, 我们将证明 Ricci-DeTurck 流的解可以产生 Ricci 流的一个解.

命题 2.6 假设 M 是一个紧致流形, h 是 M 上一个固定的度量. 假设 $\tilde{g}(t), t \in [0, T)$, 是 M 上的一族单参数的黎曼度量, 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t),$$

其中 $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\mathrm{id}$. 并且, 假设 $\varphi_t, t \in [0, T)$, 是一族单参数的微分同胚, 对所有点 $p \in M$ 和所有 $t \in [0, T)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \xi_t|_{\varphi_t(p)}.$$

那么, 度量 $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t)), t \in [0, T)$, 是 Ricci 流的一个解.

证明　利用等式 $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$, 我们可得

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t)\right),$$

从而有

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) + 2\,\mathrm{Ric}_{g(t)} = \varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + 2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} + \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t)\right) = 0,$$

因此, 度量 $g(t)$ 是 Ricci 流的一个解. □

其次, 我们假设给定 Ricci 流的一个解, 并将构造 Ricci-DeTurck 流的一个解.

命题 2.7　假设 M 是一个紧致流形, h 是 M 上一个固定的度量. 假设 $g(t), t \in [0,T)$, 是 Ricci 流的一个解. 并且, 假设 $\varphi(t), t \in [0,T)$, 是 M 上的一族单参数的微分同胚, 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = \Delta_{g(t),h}\varphi_t.$$

对每个 $t \in [0,T)$, 利用度量 $g(t)$ 定义 $\tilde{g}(t)$ 使得 $\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$. 那么

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t),$$

其中 $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\mathrm{id}$. 更进一步, 对所有点 $p \in M$ 和所有 $t \in [0,T)$, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \xi_t|_{\varphi_t(p)}.$$

证明　由引理 2.3 知, 对所有点 $p \in M$ 和所有时间 $t \in [0,T)$, 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = (\Delta_{g(t),h}\varphi_t)|_p = (\Delta_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t)),h}\varphi_t)|_p = (\Delta_{\tilde{g}(t),h}\mathrm{id})|_{\varphi_t(p)} = \xi_t|_{\varphi_t(p)}.$$

因为 $\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$, 所以

$$\varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}g(t).$$

由假设条件, 度量 $g(t)$ 是 Ricci 流的一个解, 因此, 我们得到

$$\varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + 2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} + \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}g(t) + 2\,\mathrm{Ric}_{g(t)} = 0.$$

这意味着

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t).$$

命题得证. □

定理 2.8 (R. Hamilton [44]) 假设 M 是一个紧致流形, g_0 是 M 上的一个光滑度量. 则存在实数 $T > 0$, 存在一族单参数光滑度量 $g(t), t \in [0, T)$, 使得 $g(t)$ 是 Ricci 流的一个解, 满足 $g(0) = g_0$. 并且, 该解 $g(t)$ 是唯一的.

证明 我们首先证明存在性部分. 由命题 2.5 知, 存在 Ricci-DeTurck 流的解 $\tilde{g}(t), t \in [0, T)$, 满足 $\tilde{g}(0) = g_0$. 因此, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\tilde{g}(t)} - \mathscr{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t),$$

其中 $\xi_t = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\mathrm{id}$. 对每个点 $p \in M$, 定义 $\varphi_t(p)$ 为下述常微分方程的解:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \xi_t|_{\varphi_t(p)},$$

满足初值条件: $\varphi_0(p) = p$. 由命题 2.6 知, 度量 $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t)), t \in [0, T)$, 是 Ricci 流满足初值 $g(0) = g_0$ 的解.

其次, 我们给出唯一性部分的证明. 假设 $g^1(t)$ 和 $g^2(t)$ 是定义在 $[0, T)$ 上的 Ricci 流的两个解, 满足 $g^1(0) = g^2(0)$. 断言: 对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $g^1(t) = g^2(t)$. 我们利用反证法证明该断言. 假设存在某个 $t \in [0, T)$ 使得 $g^1(t) \neq g^2(t)$. 定义实数 $\tau \in [0, T)$ 为

$$\tau = \inf\{t \in [0, T) : g^1(t) \neq g^2(t)\}.$$

显然, $g^1(\tau) = g^2(\tau)$. 记 φ_t^1 为下面调和映射热流

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1 = \Delta_{g^1(t),h}\varphi_t^1$$

满足初值 $\varphi_\tau^1 = \mathrm{id}$ 的解. 类似地, 我们记 φ_t^2 为下面调和映射热流

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2 = \Delta_{g^2(t),h}\varphi_t^2$$

满足初值 $\varphi_\tau^2 = \mathrm{id}$ 的解. 由标准的抛物型理论知, φ_t^1 和 φ_t^2 定义在某区间 $[\tau, \tau+\varepsilon)$ 上, 其中 ε 是正常数. 并且, 如果我们选取 $\varepsilon > 0$ 足够小, 那么对所有 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 有 $\varphi_t^1 : M \to M$ 和 $\varphi_t^2 : M \to M$ 都是微分同胚.

对每个 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 定义 M 上的黎曼度量 $\tilde{g}^1(t)$ 和 $\tilde{g}^2(t)$, 满足 $(\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = g^1(t)$ 和 $(\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t)$. 由命题 2.7 知, $\tilde{g}^1(t)$ 和 $\tilde{g}^2(t)$ 都是 Ricci-DeTurck 流的解. 因为 $\tilde{g}^1(\tau) = \tilde{g}^2(\tau)$, 所以由命题 2.5 的唯一性结论知, 对所有 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 有 $\tilde{g}^1(t) = \tilde{g}^2(t)$. 对每个 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 定义 M 上的向量场 ξ_t 为

$$\xi_t = \Delta_{\tilde{g}^1(t),h}\mathrm{id} = \Delta_{\tilde{g}^2(t),h}\mathrm{id}.$$

由命题 2.7, 对所有点 $p \in M$ 和所有 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1(p) = \xi_t|_{\varphi_t^1(p)}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2(p) = \xi_t|_{\varphi_t^2(p)}.$$

因为 $\varphi_\tau^1 = \varphi_\tau^2 = \mathrm{id}$, 所以对所有 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 有 $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$. 结合所有的事实, 我们得到, 对所有 $t \in [\tau, \tau+\varepsilon)$, 有

$$g^1(t) = (\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = (\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t),$$

与 τ 的定义矛盾. □

2.3 黎曼曲率张量的发展方程

在这一节中, 我们给出 Ricci 流下 Levi-Civita 联络和曲率张量的发展方程. 这些方程首先在 [44] 中给出.

假设 X, Y 是 M 上的固定的向量场 (即 X, Y 不依赖于时间 t). 定义

$$A(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t}(D_X Y).$$

注意到两个联络的差总是一张量; 从而, A 为一张量.

命题 2.9 设 X, Y, Z 是 M 上固定的向量场. 则

$$g(A(X,Y),Z) = -(D_X \operatorname{Ric})(Y,Z) - (D_Y \operatorname{Ric})(X,Z) + (D_Z \operatorname{Ric})(X,Y).$$

证明 由 Levi-Civita 联络的定义, 有

$$\begin{aligned}2g(D_XY,Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\end{aligned}$$

(见第 1.1 节). 由上式两边对 t 进行微分, 可得

$$\begin{aligned}g(A(X,Y),Z) &= \frac{\partial}{\partial t}(g(D_XY,Z)) + 2\operatorname{Ric}(D_XY,Z) \\ &= -X(\operatorname{Ric}(Y,Z)) - Y(\operatorname{Ric}(X,Z)) + Z(\operatorname{Ric}(X,Y)) \\ &\quad - \operatorname{Ric}([X,Y],Z) + \operatorname{Ric}([X,Z],Y) + \operatorname{Ric}([Y,Z],X) \\ &\quad + 2\operatorname{Ric}(D_XY,Z).\end{aligned}$$

因为 A 是一张量, 我们得到

$$g(A(X,Y),Z) = -(D_X \operatorname{Ric})(Y,Z) - (D_Y \operatorname{Ric})(X,Z) + (D_Z \operatorname{Ric})(X,Y).$$

证明完毕. □

下面我们计算曲率张量的发展方程:

命题 2.10 设 X, Y, Z, W 是 M 上固定的向量场. 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R(X,Y,Z,W) &= (D^2_{X,Z}\operatorname{Ric})(Y,W) - (D^2_{X,W}\operatorname{Ric})(Y,Z) \\ &\quad - (D^2_{Y,Z}\operatorname{Ric})(X,W) + (D^2_{Y,W}\operatorname{Ric})(X,Z) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Ric}(Z,e_k)R(X,Y,e_k,W) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Ric}(W,e_k)R(X,Y,Z,e_k).\end{aligned}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z)\\&= D_X(A(Y,Z)) - D_Y(A(X,Z))\\&\quad + A(X, D_Y Z) - A(Y, D_X Z) - A([X,Y],Z)\\&= (D_X A)(Y,Z) - (D_Y A)(X,Z).\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R(X,Y,Z,W) = &-g((D_X A)(Y,Z),W) + g((D_Y A)(X,Z),W)\\&-2\sum_{k=1}^{n} R(X,Y,Z,e_k)\,\mathrm{Ric}\,(e_k,W).\end{aligned}$$

利用命题 2.9 得到

$$\begin{aligned}&g((D_X A)(Y,Z),W)\\&= -(D^2_{X,Y}\,\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{X,Z}\,\mathrm{Ric})(Y,W) + (D^2_{X,W}\,\mathrm{Ric})(Y,Z).\end{aligned}$$

交换 X, Y 的位置可得

$$\begin{aligned}&g((D_Y A)(X,Z),W)\\&= -(D^2_{Y,X}\,\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{Y,Z}\,\mathrm{Ric})(X,W) + (D^2_{Y,W}\,\mathrm{Ric})(X,Z).\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&(D^2_{X,Y}\,\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{Y,X}\,\mathrm{Ric})(Z,W)\\&= \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,Z,e_k)\,\mathrm{Ric}\,(e_k,W) + \sum_{k=1}^{n} R(X,Y,W,e_k)\,\mathrm{Ric}\,(Z,e_k).\end{aligned}$$

结合所有事实, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}R(X,Y,Z,W)\\&= (D^2_{X,Y}\,\mathrm{Ric})(Z,W) + (D^2_{X,Z}\,\mathrm{Ric})(Y,W) - (D^2_{X,W}\,\mathrm{Ric})(Y,Z)\\&\quad -(D^2_{Y,X}\,\mathrm{Ric})(Z,W) - (D^2_{Y,Z}\,\mathrm{Ric})(X,W) + (D^2_{Y,W}\,\mathrm{Ric})(X,Z)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2 \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, Z, e_k) \operatorname{Ric}(e_k, W) \\
&= (D^2_{X,Z} \operatorname{Ric})(Y, W) - (D^2_{X,W} \operatorname{Ric})(Y, Z) \\
&\quad -(D^2_{Y,Z} \operatorname{Ric})(X, W) + (D^2_{Y,W} \operatorname{Ric})(X, Z) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, W, e_k) \operatorname{Ric}(Z, e_k) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} R(X, Y, Z, e_k) \operatorname{Ric}(e_k, W).
\end{aligned}
$$

证明完毕. □

我们断言曲率张量的发展方程的右端项, 在忽略低阶项的意义下, 等于曲率张量的 Laplace 算子. 为证明这个论断, 定义张量 $Q(R)$ 为

$$
\begin{aligned}
Q(R)(X, Y, Z, W) = &\sum_{p,q=1}^{n} R(X, Y, e_p, e_q) R(Z, W, e_p, e_q) \\
&+2 \sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, Z, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) \\
&-2 \sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, Z, e_q).
\end{aligned} \tag{5}
$$

那么我们有下面的等式, 这个等式不依赖于任何的发展方程:

命题 2.11 设 X, Y, Z, W 是 M 上固定的向量场. 则

$$
\begin{aligned}
&(D^2_{X,Z} \operatorname{Ric})(Y, W) - (D^2_{X,W} \operatorname{Ric})(Y, Z) - (D^2_{Y,Z} \operatorname{Ric})(X, W) + (D^2_{Y,W} \operatorname{Ric})(X, Z) \\
&= (\Delta R)(X, Y, Z, W) + Q(R)(X, Y, Z, W) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ric}(X, e_k) R(e_k, Y, Z, W) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ric}(Y, e_k) R(X, e_k, Z, W).
\end{aligned}
$$

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} (D^2_{X,e_k} R)(e_k, Y, Z, W) - \sum_{k=1}^{n} (D^2_{e_k,X} R)(e_k, Y, Z, W) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} R(X, e_k, e_k, e_l) R(e_l, Y, Z, W) + \sum_{k,l=1}^{n} R(X, e_k, Y, e_l) R(e_k, e_l, Z, W)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,Z,e_l)R(e_k,Y,e_l,W)+\sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,W,e_l)R(e_k,Y,Z,e_l).$$

交换 X 和 Y 的位置, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,e_k,e_l)R(e_l,X,Z,W)+\sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,X,e_l)R(e_k,e_l,Z,W)\\
&+\sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,Z,e_l)R(e_k,X,e_l,W)+\sum_{k,l=1}^{n} R(Y,e_k,W,e_l)R(e_k,X,Z,e_l).
\end{aligned}$$

第一式减第二式得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,e_k}R)(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W)\\
&-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,X}R)(e_k,Y,Z,W)+\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{k,l=1}^{n}[R(X,e_k,Y,e_l)-R(Y,e_k,X,e_l)]R(e_k,e_l,Z,W)\\
&+2\sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,Z,e_l)R(Y,e_k,W,e_l)-2\sum_{k,l=1}^{n} R(X,e_k,W,e_l)R(Y,e_k,Z,e_l)\\
&-\sum_{l=1}^{n}\operatorname{Ric}(X,e_l)R(e_l,Y,Z,W)+\sum_{l=1}^{n}\operatorname{Ric}(Y,e_l)R(e_l,X,Z,W).
\end{aligned}$$

由第一 Bianchi 恒等式得

$$R(X,e_k,Y,e_l)-R(Y,e_k,X,e_l)=R(X,Y,e_k,e_l).$$

因此, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,e_k}R)(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W)\\
&-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,X}R)(e_k,Y,Z,W)+\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
=&\,Q(R)(X,Y,Z,W)\\
&-\sum_{l=1}^{n}\operatorname{Ric}(X,e_l)R(e_l,Y,Z,W)-\sum_{l=1}^{n}\operatorname{Ric}(Y,e_l)R(X,e_l,Z,W).
\end{aligned}$$

利用第二 Bianchi 恒等式得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,e_k}R)(e_k,Y,Z,W)\\
=&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,Z}R)(e_k,Y,e_k,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{X,W}R)(e_k,Y,e_k,Z)\\
=&(D^2_{X,Z}\,\mathrm{Ric})(Y,W)-(D^2_{X,W}\,\mathrm{Ric})(Y,Z).
\end{aligned}$$

交换 X 和 Y 的位置, 得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,e_k}R)(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,Z}R)(e_k,X,e_k,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{Y,W}R)(e_k,X,e_k,Z)\\
=&(D^2_{Y,Z}\,\mathrm{Ric})(X,W)-(D^2_{Y,W}\,\mathrm{Ric})(X,Z).
\end{aligned}$$

再次利用第二 Bianchi 恒等式得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,X}R)(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,Y}R)(e_k,X,Z,W)\\
=&\sum_{k=1}^{n}(D^2_{e_k,e_k}R)(X,Y,Z,W)=(\Delta R)(X,Y,Z,W).
\end{aligned}$$

联立所有的等式, 可得命题成立. □

作为它的一个推论, 我们可以得到曲率张量的反应 – 扩散方程:

推论 2.12 设 X,Y,Z,W 是 M 上固定的向量场. 则

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}R(X,Y,Z,W)\\
=&(\Delta R)(X,Y,Z,W)+Q(R)(X,Y,Z,W)\\
&-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}\,(X,e_k)R(e_k,Y,Z,W)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}\,(Y,e_k)R(X,e_k,Z,W)\\
&-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}\,(Z,e_k)R(X,Y,e_k,W)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}\,(W,e_k)R(X,Y,Z,e_k).
\end{aligned}$$

假设 E 是在投影 $M\times(0,T)\to M,(p,t)\mapsto p$ 下, 切丛 TM 的拉回. 换句话说, E 在点 $(p,t)\in M\times(0,T)$ 处的纤维是 $E_{(p,t)}=T_pM$.

在 E 上有一个自然的联络 D, 它事实上是 TM 上 Levi-Civita 联络的延拓. 为定义该联络, 我们需要关于时间的协变导数. 在向量丛 E 上任给截面 X, 定义

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}X = \frac{\partial}{\partial t}X - \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ric}(X, e_k)e_k, \tag{6}$$

其中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是在度量 $g(t)$ 下的一组单位正交基.

命题 2.13 联络 D 与 E 上的自然的丛度量是相容的. 即对任意的向量场 X, Y 有

$$(D_{\frac{\partial}{\partial t}}g)(X, Y) = 0.$$

证明 不失一般性, 假设 X, Y 关于时间是常值. 在这种情况下, 我们有

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}X = -\sum_{k=1}^{n}\ \mathrm{Ric}\ (X, e_k)e_k, \quad D_{\frac{\partial}{\partial t}}Y = -\sum_{k=1}^{n}\ \mathrm{Ric}\ (Y, e_k)e_k.$$

这意味着

$$\begin{aligned}(D_{\frac{\partial}{\partial t}}g)(X, Y) &= \frac{\partial}{\partial t}(g(X, Y)) - g(D_{\frac{\partial}{\partial t}}X, Y) - g(X, D_{\frac{\partial}{\partial t}}Y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(g(X, Y)) + 2\,\mathrm{Ric}(X, Y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

从而命题得证. □

如果我们用关于时间的协变导数 $D_{\frac{\partial}{\partial t}}$ 代替关于时间的普通导数 $\frac{\partial}{\partial t}$, 那么黎曼曲率张量的发展方程可以大大化简. 这就是大家所熟悉的 Uhlenbeck 技巧 (见 [45]).

命题 2.14 对所有的向量场 X, Y, Z, W, 我们有

$$(D_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(X, Y, Z, W) = (\Delta R)(X, Y, Z, W) + Q(R)(X, Y, Z, W).$$

证明 不失一般性, 假设 X, Y, Z, W 关于时间是常值. 在这种情况下, 我们有

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}X = -\sum_{k=1}^{n}\ \mathrm{Ric}\ (X, e_k)e_k, \qquad D_{\frac{\partial}{\partial t}}Y = -\sum_{k=1}^{n}\ \mathrm{Ric}\ (Y, e_k)e_k,$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(Z, e_k)e_k, \qquad D_{\frac{\partial}{\partial t}} W = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(W, e_k)e_k.$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&(D_{\frac{\partial}{\partial t}} R)(X, Y, Z, W) - \frac{\partial}{\partial t} R(X, Y, Z, W)\\
=& -R(D_{\frac{\partial}{\partial t}} X, Y, Z, W) - R(X, D_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, Z, W)\\
&-R(X, Y, D_{\frac{\partial}{\partial t}} Z, W) - R(X, Y, Z, D_{\frac{\partial}{\partial t}} W)\\
=& \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(X, e_k)R(e_k, Y, Z, W) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(Y, e_k)R(X, e_k, Z, W)\\
&+\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(Z, e_k)R(X, Y, e_k, W) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ric}\,(W, e_k)R(X, Y, Z, e_k).
\end{aligned}$$

利用推论 2.12 可知结论成立. □

2.4 Ricci 曲率和数量曲率的发展方程

在这一节中, 我们将计算 Ricci 曲率和数量曲率的发展方程. 我们假设 M 是一个紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上 Ricci 流的一个解.

命题 2.15 $g(t)$ 的 Ricci 张量满足

$$(D_{\frac{\partial}{\partial t}}\, \mathrm{Ric})(X, Y) = (\Delta\, \mathrm{Ric})(X, Y) + 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, Y, e_q)\, \mathrm{Ric}\,(e_p, e_q).$$

证明 注意到 $D_{\frac{\partial}{\partial t}} g = 0$. 所以利用命题 2.14 可得

$$(D_{\frac{\partial}{\partial t}}\, \mathrm{Ric})(X, Y) = (\Delta\, \mathrm{Ric})(X, Y) + \sum_{k=1}^{n} Q(R)(X, e_k, Y, e_k).$$

并且, 由 $Q(R)$ 的定义知

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} Q(R)(X, e_k, Y, e_k) =& \sum_{k,p,q=1}^{n} R(X, e_k, e_p, e_q)R(Y, e_k, e_p, e_q)\\
&+2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X, e_p, Y, e_q)R(e_k, e_p, e_k, e_q)\\
&-2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X, e_p, e_k, e_q)R(Y, e_q, e_k, e_p).
\end{aligned} \tag{7}$$

利用第一 Bianchi 恒等式得

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)R(Y,e_q,e_k,e_p) \\
= & \sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)[R(Y,e_q,e_k,e_p) - R(Y,e_k,e_q,e_p)] \\
= & \sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,e_k,e_q)R(Y,e_p,e_k,e_q).
\end{aligned}
$$

所以等式 (7) 可以写为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} Q(R)(X,e_k,Y,e_k) &= 2\sum_{k,p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)R(e_k,e_p,e_k,e_q) \\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)\,\mathrm{Ric}\,(e_p,e_q).
\end{aligned}
$$

结合所有的事实, 结论得证. □

推论 2.16　$g(t)$ 的数量曲率满足

$$
\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{scal} = \Delta\mathrm{scal} + 2|\mathrm{Ric}|^2.
$$

证明　在命题 2.15 中对 X 和 Y 求迹即可. □

推论 2.17　$g(t)$ 的无迹 Ricci 张量满足

$$
\begin{aligned}
(D_{\frac{\partial}{\partial t}}\mathring{\mathrm{Ric}})(X,Y) = (\Delta\mathring{\mathrm{Ric}})(X,Y) + 2\sum_{p,q=1}^{n} R(X,e_p,Y,e_q)\,\mathring{\mathrm{Ric}}(e_p,e_q) \\
+\frac{2}{n}\,\mathrm{scal}\,\mathring{\mathrm{Ric}}(X,Y) - \frac{2}{n}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 g(X,Y).
\end{aligned}
$$

证明　由命题 2.15 和推论 2.16 可以得知结论成立. □

在这一节剩下的部分, 我们将讨论推论 2.16 的应用. 注意到在数量曲率的发展方程中的反应项永远是非负的. 所以, $g(t)$ 的数量曲率的最小值是单调递增的. 特别地, 我们有

命题 2.18　假设 $(M,g(0))$ 具有非负的数量曲率, 则对所有的时间 $t\in[0,T)$, 有 $(M,g(t))$ 具有非负的数量曲率. 并且, 如果存在某点 $p_0\in$

M 和某个时间 $t_0 \in (0, T)$, 使得 $\mathrm{scal}_{g(t_0)}(p_0) = 0$, 那么对每个时间 $t \in [0, T)$, $(M, g(t))$ 的 Ricci 张量为零.

证明 第一个结论由极值原理可以得到. 为证明第二个结论, 我们假设存在某点 $p_0 \in M$ 和某个时间 $t_0 \in (0, T)$, 使得 $\mathrm{scal}_{g(t_0)}(p_0) = 0$. 由强极值原理得, 对所有点 $p \in M$ 和所有时间 $t \in [0, t_0)$, 有 $\mathrm{scal}_{g(t)}(p) = 0$. 代入数量曲率的发展方程, 我们得到在所有时间 $t \in [0, t_0)$, Ricci 张量为零. 因此, 由定理 2.8 的唯一性知, 对所有时间 $t \in [0, T)$, 有 $g(t) = g(0)$. □

如果我们利用反应项, 可以得到一个更强的结论:

命题 2.19 假设 $\inf_M \mathrm{scal}_{g(0)} = \alpha > 0$, 则 $T \leqslant \dfrac{n}{2\alpha}$; 并且, 对所有时间 $t \in [0, T)$, 有 $\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)} \geqslant \dfrac{n\alpha}{n - 2\alpha t}$.

证明 记 $\tau = \min\left\{T, \dfrac{n}{2\alpha}\right\}$. 定义函数 $h : M \times [0, \tau) \to \mathbb{R}$ 为

$$h = \mathrm{scal} - \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}.$$

利用推论 2.16, 我们得到在 $M \times [0, \tau)$ 上有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h &= \Delta h + 2|\mathrm{Ric}|^2 - \frac{2}{n}\left(\frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}\right)^2 \\
&\geqslant \Delta h + \frac{2}{n}\,\mathrm{scal}^2 - \frac{2}{n}\left(\frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}\right)^2 \\
&= \Delta h + \frac{2}{n}\left(\mathrm{scal} + \frac{n\alpha}{n - 2\alpha t}\right)h.
\end{aligned}$$

由 α 的定义知, 对所有的点 $p \in M$, 有 $h(p, 0) \geqslant 0$. 所以由极值原理, 对所有的点 $p \in M$ 和所有的时间 $t \in [0, \tau)$, 有 $h(p, t) \geqslant 0$. 因此, 对所有的 $t \in [0, \tau)$, 有 $\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)} \geqslant \dfrac{n\alpha}{n - 2\alpha t}$. 从而, 我们可得到 $T \leqslant \dfrac{n}{2\alpha}$. □



第三章　内估计

3.1　曲率张量的导数估计

在这一节中, 我们将介绍曲率张量的协变导数的一些估计. 这些估计是由 W.X. Shi [78] 给出的 (见 [49], 第 7 节). 在整个这一节中, 我们始终假设 M 是一个紧致的流形, $g(t), t \in [0, \tau)$, 是 M 上的 Ricci 流的解. 我们记 $D^m R$ 为黎曼曲率张量的 m 阶协变导数. 给定两个张量 A, B, 记 $A * B$ 为 A, B 的任意双线性表示.

引理 3.1　*假设 M 是一光滑流形, $g(t), t \in [0, \tau)$, 是 M 上的 Ricci 流的解. 则对 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 有*

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m R = \Delta D^m R + \sum_{l=0}^{m} D^l R * D^{m-l} R.$$

证明　我们对 m 利用归纳法证明. 由推论 2.12 知, 当 $m = 0$ 时结论成立. 所以下面我们假设 $m \geqslant 1$ 并且

$$\frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} R = \Delta D^{m-1} R + \sum_{l=0}^{m-1} D^l R * D^{m-l-1} R.$$

这意味着

$$D\frac{\partial}{\partial t}D^{m-1}R = D\Delta D^{m-1}R + \sum_{l=0}^{m} D^l R * D^{m-l}R.$$

利用命题 2.9, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}D^m R = D\frac{\partial}{\partial t}D^{m-1}R + DR * D^{m-1}R.$$

并且

$$\Delta D^m R = D\Delta D^{m-1}R + R * D^m R + DR * D^{m-1}R.$$

结合所有的事实, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}D^m R = \Delta D^m R + \sum_{l=0}^{m} D^l R * D^{m-l}R.$$

证明完毕. □

命题 3.2 (W. X. Shi [78]) 假设 M 是 n 维紧致流形, $g(t), t \in [0,\tau)$, 是 M 上的 Ricci 流的解, 满足

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leqslant \tau^{-1}$$

对所有 $t \in [0,\tau]$ 成立. 则任给整数 $m \geqslant 1$, 存在与 n, m 有关的正常数 C, 使得对所有 $t \in [0,\tau]$ 有

$$\sup_M |D^m R_{g(t)}|^2 \leqslant C\tau^{-2}t^{-m}.$$

证明 我们对 m 利用归纳法证明. 固定 $m \geqslant 1$, 假设对所有时间 $t \in [0,\tau]$ 和所有 $l = 0, 1, \cdots, m-1$, 有

$$\sup_M |D^l R_{g(t)}|^2 \leqslant C_1\tau^{-2}t^{-l}.$$

由引理 3.1 知, 在 $M \times [0,\tau]$ 上有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(|D^{m-1}R|^2) \leqslant{}& \Delta(|D^{m-1}R|^2) - 2|D^m R|^2\\ &+C_2\sum_{l=0}^{m-1}|D^l R||D^{m-l-1}R||D^{m-1}R|.\end{aligned}$$

再由归纳假设, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(|D^{m-1}R|^2) \leqslant \Delta(|D^{m-1}R|^2) - 2|D^m R|^2 + C_3\tau^{-2}t^{-m}. \tag{8}$$

并且, 引理 3.1 意味着在 $M \times [0, \tau]$ 上

$$\frac{\partial}{\partial t}(|D^m R|^2) \leqslant \Delta(|D^m R|^2) + C_4 \sum_{l=0}^{m} |D^l R||D^{m-l}R||D^m R|.$$

再次利用归纳假设得到在 $M \times [0, \tau]$ 上

$$\frac{\partial}{\partial t}(|D^m R|^2) \leqslant \Delta(|D^m R|^2) + C_5 t^{-1}|D^m R|^2 + C_5\tau^{-1}t^{-\frac{m}{2}-1}|D^m R|. \tag{9}$$

定义函数 $F : M \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$ 为

$$F = t^{m+1}|D^m R|^2 + \frac{1}{2}(C_5 + m + 2)t^m|D^{m-1}R|^2.$$

利用 (8) 和 (9), 得到在 $M \times [0, \tau]$ 上

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F \leqslant\ & \Delta F - t^m|D^m R|^2 + C_5\tau^{-1}t^{\frac{m}{2}}|D^m R| \\ & + \frac{1}{2}(C_5 + m + 2)mt^{m-1}|D^{m-1}R|^2 + \frac{1}{2}C_3(C_5 + m + 2)\tau^{-2}.\end{aligned}$$

由归纳假设知, 在 $M \times [0, \tau]$ 上, 有 $|D^{m-1}R|^2 \leqslant C_1\tau^{-2}t^{1-m}$. 从而, 存在常数 C_6 使得

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leqslant \Delta F + C_6\tau^{-2}.$$

由极值原理, 我们知道对 $t \in [0, \tau]$, 有 $\sup_M F \leqslant C_6\tau^{-2}t$. 由此可得结论. □

推论 3.3 (W. X. Shi [78]) 假设 M 是 n 维紧致流形. $g(t), t \in [0, \tau)$, 是 M 上的 Ricci 流的解, 满足

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leqslant \tau^{-1}$$

对所有 $t \in [0, \tau]$ 成立. 则任给整数 $m \geqslant 1$, 存在与 n, m 有关的正常数 C, 使得对所有 $t \in [\tau/2, \tau]$ 有

$$\sup_M |D^m R_{g(t)}|^2 \leqslant C\tau^{-m-2}.$$

3.2 张量的导数估计

同前一节假设一样, 我们假设 M 是一个紧致流形, $g(t), t \in [0, \tau]$, 是 M 上的 Ricci 流的解. 并且, 我们假设 H 是一光滑张量, 满足

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta H + R * H,$$

其中 $R * H$ 为 R, H 的双线性表示. 记 $D^m H$ 为 H 的 m 阶协变导数. 为估计 $D^m H$, 我们需要下面的引理:

引理 3.4 对 $m = 1, 2, \cdots$, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m H = \Delta D^m H + \sum_{l=0}^{m} D^l R * D^{m-l} H.$$

证明 我们对 m 利用归纳法证明. 假设 $m \geqslant 1$, 并且

$$\frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} H = \Delta D^{m-1} H + \sum_{l=0}^{m-1} D^l R * D^{m-l-1} H.$$

这意味着

$$D \frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} H = D \Delta D^{m-1} H + \sum_{l=0}^{m} D^l R * D^{m-l} H.$$

利用命题 2.9 得

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m H = D \frac{\partial}{\partial t} D^{m-1} H + DR * D^{m-1} H.$$

并且,

$$\Delta D^m H = D \Delta D^{m-1} H + R * D^m H + DR * D^{m-1} H.$$

结合所有的事实, 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} D^m H = \Delta D^m H + \sum_{l=0}^{m} D^l R * D^{m-l} H.$$

证明完毕. □

命题 3.5 假设 M 是 n 维紧致流形, $g(t), t \in [0, \tau]$, 是 M 上的 Ricci 流的解, 满足

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leqslant \tau^{-1}$$

对所有 $t \in [0, \tau]$ 成立. 并且, 假设 H 是光滑张量场, 满足

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta H + R * H,$$

同时, 对所有的 $t \in [0, \tau]$, 有

$$\sup_M |H| \leqslant \Lambda.$$

则任给整数 $m \geqslant 1$, 存在正常数 C, 使得对所有 $t \in (0, \tau]$, 有

$$\sup_M |D^m H|^2 \leqslant C \Lambda^2 t^{-m}.$$

证明 我们对 m 利用归纳法证明. 假设 $m \geqslant 1$, 并且对所有 $t \in (0, \tau]$ 和所有 $l = 0, 1, \cdots, m-1$ 有

$$\sup_M |D^l H|^2 \leqslant C_1 \Lambda^2 t^{-1}. \tag{10}$$

由命题 3.2知, 存在正常数 C_2, 使得对所有 $t \in (0, \tau]$ 和所有 $l = 0, 1, \cdots, m$, 有

$$\sup_M |D^l R|^2 \leqslant C_2 t^{-m-2}. \tag{11}$$

并且, 由引理 3.4 知, 在 $M \times (0, \tau]$ 上有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(|D^{m-1} H|^2) \leqslant{} & \Delta(|D^{m-1} H|^2) - 2|D^m H|^2 \\ & + C_3 \sum_{l=0}^{m-1} |D^l R||D^{m-l-1} H||D^{m-1} H|. \end{aligned}$$

利用 (10) 和 (11) 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(|D^{m-1} H|^2) \leqslant \Delta(|D^{m-1} H|^2) - 2|D^m H|^2 + C_4 \Lambda^2 t^{-m}. \tag{12}$$

并且

$$\frac{\partial}{\partial t}(|D^m H|^2) \leqslant \Delta(|D^m H|^2) + C_5 \sum_{l=0}^{m} |D^l R||D^{m-l} H||D^m H|.$$

再次利用 (10) 和 (11) 得

$$\frac{\partial}{\partial t}(|D^m H|^2) \leqslant \Delta(|D^m H|^2) + C_6 t^{-1}|D^m H|^2 + C_6 \Lambda t^{-\frac{m}{2}-1}|D^m H|. \tag{13}$$

定义函数 $F : M \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$ 为

$$F = t^{m+1}|D^m H|^2 + \frac{1}{2}(C_6 + m + 2)t^m |D^{m-1} H|^2.$$

利用 (12) 和 (13), 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F \leqslant\ & \Delta F - t^m |D^m H|^2 + C_6 \Lambda t^{\frac{m}{2}} |D^m H| \\ & + \frac{1}{2}(C_6 + m + 2) m t^{m-1} |D^{m-1} H|^2 + \frac{1}{2} C_4 (C_6 + m + 2)\Lambda^2.\end{aligned}$$

并且, 由 (10) 可得, 在 $M \times (0, \tau]$ 上, 有 $|D^{m-1} H|^2 \leqslant C_1 \Lambda^2 t^{1-m}$. 从而, 存在正常数 C_7, 使得在 $M \times (0, \tau]$ 上, 有

$$\frac{\partial}{\partial t}F \leqslant \Delta F + C_7 \Lambda^2.$$

由极值原理, 我们得到, 对所有 $t \in (0, \tau]$, 有 $\sup_M F \leqslant C_7 \Lambda^2 t$. 由此可得结论成立. □

推论 3.6 假设 M 是 n 维紧致流形, $g(t), t \in [0, \tau]$, 是 M 上的 Ricci 流的解, 满足

$$\sup_M |R_{g(t)}| \leqslant \tau^{-1}$$

对所有 $t \in [0, \tau]$ 成立. 并且, 假设 H 是光滑张量场, 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}H = \Delta H + R * H,$$

同时, 对所有 $t \in [0, \tau]$, 有

$$\sup_M |H| \leqslant \Lambda.$$

则任给整数 $m \geqslant 1$, 存在正常数 C, 使得对所有 $t \in [\tau/2, \tau]$, 有

$$\sup_M |D^m H|^2 \leqslant C \Lambda^2 \tau^{-m}.$$

3.3 曲率在有限时间内奇点处爆破

为完成这一章, 我们考虑 Ricci 流的定义在有限时间区间 $[0, T)$ 上的最大解. 我们将证明这种解具有无界的曲率.

定理 3.7 (R. Hamilton [44]) 假设 M 是一个紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上的 Ricci 流的一个最大解. 并且, 假设 $T < \infty$. 则

$$\limsup_{t \to T} \sup_M |R_{g(t)}| = \infty.$$

证明 假设结论不对, 则对所有的 $t \in [0, T)$, $g(t)$ 的曲率张量是一致有界的. 利用推论 3.3, 我们知道对 $m = 1, 2, \cdots$, 有

$$\sup_{t \in [0,T)} \sup_M |D^m R_{g(t)}| < \infty.$$

为方便起见, 我们记 $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \omega(t)$, 其中 $\omega(t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}$, 则对 $m = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\sup_{t \in [0,T)} \sup_M |D^m \omega(t)|_{g(t)} < \infty.$$

由命题 A.5, 度量 $g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于 M 上的有限度量 $\bar{g}$. 定理 2.8 保证, 我们可以将解延拓, 使得超过时间 T, 这与 T 的最大性矛盾. □

N. Šešum [77] 证明了 Ricci 流的任何解, 如果发生奇性, 那么 Ricci 曲率一定无界.



第四章　S^2 上的 Ricci 流

4.1　S^2 上的梯度 Ricci 孤立子

在这一节中, 我们将证明 S^2 上的任何梯度 Ricci 孤立子具有常曲率. 这个结果首先是由 R. Hamilton [46] 证明的. 在下面我们将给出 X. Chen, P. Lu 和 G. Tian [29] 的另一个证明.

在整个这一节中, 我们始终假设 (S^2, g) 是梯度 Ricci 孤立子. 因此, 存在实数 ρ 和光滑函数 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{Ric}_g + D^2 f = \rho g$. 在二维时, 这个式子可以写为

$$D^2 f = \left(\rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}_g\right) g. \tag{14}$$

为简单起见, 我们记 ξ 为函数 f 的梯度向量场, 并且, 我们假设 J 是 S^2 上的与度量 g 相容的近复结构.

引理 4.1　*向量场 $J\xi$ 生成了单参数的等距变换群*

$$\varphi_t : (S^2, g) \to (S^2, g).$$

证明　对所有的向量场 X, Y, 我们有

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_{J\xi}g)(X,Y) &= -g(D_X\xi, JY) - g(D_Y\xi, JX)\\ &= -(D^2f)(X,JY) - (D^2f)(Y,JX).\end{aligned}$$

利用 (14), 可得 $\mathscr{L}_{J\xi}g = 0$. □

记 p, q 为 f 的两个不同的临界点. 为简单起见, 记 $a = \rho - \frac{1}{2}\operatorname{scal}_g(p)$ 和 $b = \rho - \frac{1}{2}\operatorname{scal}_g(q)$. 利用 (14) 得到, 对所有的向量 $v \in T_pS^2$, 有

$$(D^2f)_p(v,v) = a|v|^2.$$

这意味着, 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和所有的向量 $v \in T_pS^2$, 有

$$(d\varphi_t)_p(v) = \cos(at)v + \sin(at)Jv. \tag{15}$$

类似地, 对所有的向量 $w \in T_pS^2$, 有

$$(D^2f)_q(w,w) = b|w|^2.$$

从而, 我们可得到, 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和所有的向量 $w \in T_qS^2$, 有

$$(d\varphi_t)_q(w) = \cos(bt)w + \sin(bt)Jw. \tag{16}$$

引理 4.2　设 t 是任意的实数, 则

$$\frac{at}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi_t = \mathrm{id} \Leftrightarrow \frac{bt}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

证明　假设 $\frac{at}{2\pi}$ 是整数. 利用 (15) 得, 对所有 $v \in T_pS^2$, 有 $(d\varphi_t)_p(v) = v$. 因为 φ_t 是等距, 所以

$$\varphi_t(\exp_p(v)) = \exp_{\varphi_t(p)}((d\varphi_t)_p(v)) = \exp_p(v).$$

从而 $\varphi_t = \mathrm{id}$.

反过来, 如果 $\varphi_t = \mathrm{id}$, 那么对所有向量 $v \in T_pS^2$, 有 $(d\varphi_t)_p(v) = v$. 从而由 (15) 得 $\frac{at}{2\pi}$ 是整数.

总之, 我们已经证明 $\frac{at}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi_t = \mathrm{id}$. 类似的证明可以得到 $\frac{bt}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi_t = \mathrm{id}$. □

命题 4.3 假设 (S^2, g) 是梯度 Ricci 孤立子, 那么它具有常数量曲率.

证明 我们用 [29] 中的证明. 存在单位速度的测地线 $\gamma : [0, \sigma] \to (S^2, g)$ 满足 $\gamma(0) = p$, $\gamma(\sigma) = q$, $\sigma = d(p, q)$. 由引理 4.1, 映射 $\varphi_t : (S^2, g) \to (S^2, g)$ 是等距. 因此对 $t \in \mathbb{R}$, 曲线 $s \mapsto \varphi_t(\gamma(s))$ 是单位速度测地线.

定义沿 γ 的向量场 V : 对所有 $s \in [0, \sigma]$, 令

$$V(s) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(\gamma(s))\Big|_{t=0} = J\xi\Big|_{\gamma(s)}.$$

显然, V 是沿 γ 的 Jacobi 场, 满足 $V(0) = 0, V(\sigma) = 0$. 这意味着对所有 $s \in [0, \sigma]$, 我们有 $\langle V(s), \gamma'(s)\rangle = 0$. 因此, 存在光滑函数 $u : [0, \sigma] \to \mathbb{R}$, 使得对所有 $s \in [0, \sigma]$, 有 $V(s) = u(s)J\gamma'(s)$. 并且, $u(0) = u(\sigma) = 0$.

因为 V 是 Jacobi 场, 所以对所有 $s \in [0, \sigma]$, 有

$$u''(s) + \frac{1}{2}u(s)\,\mathrm{scal}_g(\gamma(s)) = 0. \tag{17}$$

注意到对所有 $s \in [0, \sigma]$, 有

$$\langle \xi|_{\gamma(s)}, \gamma'(s)\rangle = \langle V(s), J\gamma'(s)\rangle = u(s).$$

对上式关于 s 微分, 得到

$$(D^2 f)_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = u'(s).$$

利用 (14), 可知

$$\rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}_g(\gamma(s)) = u'(s). \tag{18}$$

将 (18) 代入 (17), 得到

$$u''(s) + \rho u(s) = u(s)u'(s). \tag{19}$$

由 (18) 可得

$$a = \rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}_g(p) = u'(0),$$

$$b = \rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}_g(q) = u'(\sigma).$$

并且, 由引理 4.2 知 $a^2 = b^2$. 所以, 我们得到 $u'(0)^2 = u'(\sigma)^2$. 利用 (19) 得

$$0 = \frac{1}{2}(u'(\sigma)^2 - u'(0)^2) + \frac{1}{2}\rho(u(\sigma)^2 - u(0)^2) = \int_0^\sigma u(s)u'(s)^2 ds.$$

所以, 存在实数 $s_0 \in (0,\sigma)$ 使得 $u(s_0) = 0$. 因为 γ 上没有共轭点, 所以对所有 $s \in [0,\sigma]$, 有 $u(s) = 0$. 特别地, 我们有 $a = u'(0) = 0$ 和 $b = u'(\sigma) = 0$. 利用引理 4.2, 我们得到, 对所有 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\varphi_t = \mathrm{id}$. 所以, 向量场 $J\xi$ 恒为零. 从而, f 是常数, 并且 $\mathrm{scal}_g = 2\rho$. □

4.2 Hamilton 熵函数的单调性

在这一节中, 我们将讨论 S^2 上 Ricci 流的单调性公式. 设 g_0 是 S^2 上的黎曼度量, 具有正的数量曲率, 假设 $g(t), t \in [0,T)$, 是具有初值 g_0 的 Ricci 流的唯一的最大解. 为方便起见, 我们假设 $\mathrm{vol}(S^2, g_0) = 8\pi$.

引理 4.4 对所有 $t \in [0,T)$, 有 $\mathrm{vol}(S^2, g(t)) = 8\pi(1-t)$. 特别地, $T \leqslant 1$.

证明 利用 Gauss-Bonnet 定理, 我们得到

$$\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(S^2, g(t)) = -\int_{S^2} \mathrm{scal}\; d\mathrm{vol} = -8\pi.$$

由此可得结论. □

我们现在描述 Hamilton 的熵泛函. 对每个 $t \in [0,T)$, $g(t)$ 的熵泛函定义为 (见 [46])

$$\mathscr{E}(t) = \int_{S^2} \mathrm{scal}\;\log(\mathrm{scal})\; d\mathrm{vol} + 8\pi\log(1-t). \tag{20}$$

引理 4.5 对所有 $t \in [0,T)$, 有 $\mathscr{E}(t) \geqslant 0$.

证明 我们有逐点估计

$$(1-t)\,\mathrm{scal}\;\log\left((1-t)\,\mathrm{scal}\right) \geqslant (1-t)\,\mathrm{scal} - 1.$$

利用 Gauss-Bonnet 定理和引理 4.4 知

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t) &= \int_{S^2} \text{scal}\ \log((1-t)\,\text{scal})\,d\text{vol} \\ &\geqslant \int_{S^2} \left(\text{scal} - \frac{1}{1-t}\right) d\text{vol} = 0.\end{aligned}$$

证明完毕. □

对每个 $t \in [0, T)$, 存在光滑函数 f 使得

$$\text{scal} + \Delta f = \frac{1}{1-t}. \tag{21}$$

函数 f 在相差一个常数的意义下是唯一的. 我们记 M 是 f 的 Hessian 矩阵的无迹部分, 即

$$M = D^2 f - \frac{1}{2}(\Delta f) g. \tag{22}$$

并且, 我们定义, 对每个 $t \in [0, T)$, 有

$$\mathscr{M}(t) = \int_{S^2} |M|^2 d\text{vol}. \tag{23}$$

下面的估计是 [46] 中的引理 7.1 的一个变形:

引理 4.6 对每个 $t \in [0, T)$, 有

$$\int_{S^2} \frac{1}{\text{scal}} |d\text{scal}|^2 d\text{vol} \geqslant \int_{S^2} (\Delta f)^2 d\text{vol} + 2\int_{S^2} |M|^2 d\text{vol}.$$

证明 我们利用 B. Chow 的证明. 因为 $\text{scal} + \Delta f$ 是常数, 所以

$$\begin{aligned}&\int_{S^2} \frac{1}{\text{scal}} |d\text{scal}|^2 d\text{vol} - 2\int_{S^2} (\Delta f)^2 d\text{vol} + \int_{S^2} \text{scal}\ |df|^2 d\text{vol} \\ &= \int_{S^2} \frac{1}{\text{scal}} |d\text{scal}|^2 d\text{vol} - 2\int_{S^2} \langle d\text{scal}, df\rangle d\text{vol} + \int_{S^2} \text{scal}\ |df|^2 d\text{vol} \\ &= \int_{S^2} \frac{1}{\text{scal}} |d\text{scal} - \text{scal}\ df|^2 d\text{vol} \geqslant 0.\end{aligned}$$

并且, 由 Bochner 公式得

$$2\int_{S^2} (\Delta f)^2 d\text{vol} - \int_{S^2} \text{scal}\ |df|^2 d\text{vol} = 2\int_{S^2} |D^2 f|^2 d\text{vol}.$$

结合所有的事实, 可得

$$\int_{S^2} \frac{1}{\mathrm{scal}} |d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{vol} \geqslant 2 \int_{S^2} |D^2 f|^2 d\mathrm{vol}.$$

因为 $|D^2 f|^2 = \frac{1}{2}(\Delta f)^2 + |M|^2$, 由此可得结论成立. □

下面我们将证明函数 $t \mapsto \mathscr{E}(t)$ 是单调递减的. 这首先是由 R. Hamilton 证明的 (见 [46] , 定理 7.2).

命题 4.7 对所有 $t \in [0, T)$, 有 $\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) \leqslant -2\mathscr{M}(t)$. 特别地, 函数 $t \mapsto \mathscr{E}(t)$ 是单调递减的.

证明 由推论 2.16 知, $g(t)$ 的数量曲率满足发展方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{scal} = \Delta\mathrm{scal} + \mathrm{scal}^2.$$

这意味着

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathscr{E}(t) &= \int_{S^2} (1 + \log(\mathrm{scal})) \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{scal}\ d\mathrm{vol} - \int_{S^2} \mathrm{scal}^2 \log(\mathrm{scal}) d\mathrm{vol} - \frac{8\pi}{1-t} \\
&= \int_{S^2} (1 + \log(\mathrm{scal}))\Delta\mathrm{scal}\ d\mathrm{vol} + \int_{S^2} \mathrm{scal}^2 d\mathrm{vol} - \frac{8\pi}{1-t} \\
&= -\int_{S^2} \frac{1}{\mathrm{scal}} |d\mathrm{scal}|^2 d\mathrm{vol} + \int_{S^2} (\Delta f)^2 d\mathrm{vol}.
\end{aligned}$$

因此, 由引理 4.6 可得结论成立. □

命题 4.8 我们有 $T = 1$, 并且

$$\sup_{t\in[0,1)} \left[(1-t) \sup_{S^2} \mathrm{scal}_{g(t)}\right] < \infty.$$

证明 如果我们可以证明

$$\sup_{t\in[0,T)} \left[(1-t) \sup_{S^2} \mathrm{scal}_{g(t)}\right] < \infty, \tag{24}$$

那么这个结果将由定理 3.7 得到. 为证明 (24), 我们利用反证法. 假设 (24) 不成立, 那么我们定义时间序列 $t_k \in [0, T)$ 为

$$t_k = \inf\left\{t \in [0, T) : (1-t) \sup_{S^2} \mathrm{scal}_{g(t)} \geqslant 2k\right\}.$$

下面, 我们选取使 $t_k > 0$ 的充分大的 k. 对每个 k, 选取 $p_k \in S^2$, 使得在该点处, 度量 $g(t_k)$ 的数量曲率达到最大值. 这意味着

$$\mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k) = \sup_{S^2} \ \mathrm{scal}_{g(t_k)} = \frac{2k}{1-t_k}.$$

由推论 3.3 知, 存在一致常数 $N \geqslant 1$, 使得对所有 k 有

$$\sup_{S^2} |d\mathrm{scal}_{g(t_k)}|^2 \leqslant N\left(\frac{k}{1-t_k}\right)^3.$$

所以, 如果我们定义

$$\Omega_k = \left\{x \in S^2 : d_{g(t_k)}(p_k, x) \leqslant \sqrt{\frac{1-t_k}{N_k}}\right\},$$

则对所有 k 有

$$\inf_{x\in\Omega_k} \ \mathrm{scal}_{g(t_k)}(x) \geqslant \ \mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k) - \frac{k}{1-t_k} = \frac{k}{1-t_k}.$$

这意味着

$$\int_{\Omega_k} \mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\,\mathrm{scal}_{g(t_k)})d\mathrm{vol}_{g(t_k)} \geqslant \frac{k\log k}{1-t_k}\mathrm{vol}(\Omega_k, g(t_k)). \tag{25}$$

利用逐点估计

$$(1-t_k)\,\mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\,\mathrm{scal}_{g(t_k)}) \geqslant -1,$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{S^2\setminus\Omega_k} \mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\,\mathrm{scal}_{g(t_k)})d\mathrm{vol}_{g(t_k)}\\ &\geqslant -\frac{1}{1-t_k}\mathrm{vol}(S^2\setminus\Omega_k, g(t_k)) \geqslant -8\pi.\end{aligned} \tag{26}$$

由 (25) 和 (26) 得到

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t_k) &= \int_{S^2} \mathrm{scal}_{g(t_k)} \log((1-t_k)\,\mathrm{scal}_{g(t_k)})d\mathrm{vol}_{g(t_k)}\\ &\geqslant \frac{k\log k}{1-t_k}\mathrm{vol}(\Omega_k, g(t_k)) - 8\pi.\end{aligned} \tag{27}$$

由 Klingenberg 的定理 (见 [26], 定理 5.9) 可知, $(S^2, g(t_k))$ 的单射半径有下界估计

$$\operatorname{inj}(S^2, g(t_k)) \geqslant \pi \sqrt{\frac{1-t_k}{k}}.$$

所以, 球 Ω_k 的半径小于 $(S^2, g(t_k))$ 的单射半径. 这意味着

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{k}{1-t_k} \operatorname{vol}(\Omega_k, g(t_k)) > 0.$$

因此, 由 (27) 得到, 当 $k \to \infty$ 时, $\mathscr{E}(t_k) \to \infty$. 与命题 4.7 矛盾. □

命题 4.9 伸缩变换后的度量 $\tilde{g}(t) = \dfrac{1}{1-t} g(t)$ 具有下面的性质:

(i) $(S^2, \tilde{g}(t))$ 的数量曲率对所有 $t \in [0,1)$ 是一致有界的, 并且数量曲率的高阶导数也是一致有界的.

(ii) $(S^2, \tilde{g}(t))$ 的单射半径对所有 $t \in [0,1)$ 是一致有下界的.

(iii) $(S^2, \tilde{g}(t))$ 的直径对所有 $t \in [0,1)$ 是一致有上界的.

证明 由命题 4.8 知

$$\sup_{t\in[0,1)} \left[(1-t) \sup_{S^2} \operatorname{scal}_{g(t)}\right] < \infty.$$

利用推论 3.3, 可得对 $m = 1, 2, \cdots$, 有

$$\sup_{t\in[0,1)} \left[(1-t)^{m+2} \sup_{S^2} |D^m \operatorname{scal}_{g(t)}|^2\right] < \infty.$$

由此可得第一个结论. 第二个结论是命题 4.8 和 Klingenberg 单射半径估计 (见 [26], 定理 5.9) 的一个直接推论.

接下来, 我们将证明第三个结论. 为此, 利用反证法. 假设存在时间序列 $t_k \in [0,1)$, 对所有 k, 有

$$\operatorname{diam}(S^2, \tilde{g}(t_k)) \geqslant k.$$

对每个 k, 选取单位速度测地线 $\gamma_k : [0,k] \to (S^2, \tilde{g}(t_k))$ 满足 $d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(0), \gamma_k(k)) = k$. 对 $i = 0, 1, \cdots, k$, 定义

$$\Omega_{i,k} = \left\{x \in S^2 : d_{\tilde{g}(t_k)}(\gamma_k(i), x) \leqslant \frac{1}{4}\right\}.$$

因为 $(S^2, \tilde{g}(t_k))$ 的数量曲率是一致有上界的, 并且 $(S^2, \tilde{g}(t_k))$ 的单射半径是一致有下界的, 所以

$$\min_{i=0,1,\cdots,k} \mathrm{vol}(\Omega_{i,k}, \tilde{g}(t_k)) \geqslant \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 与 k 无关. 由于集合 $\Omega_{i,k}, i = 0, 1, \cdots, k$, 是不交的, 所以对所有 k, 有

$$\mathrm{vol}(S^2, \tilde{g}(t_k)) \geqslant \sum_{i=0}^{k} \mathrm{vol}(\Omega_{i,k}, \tilde{g}(t_k)) \geqslant \varepsilon(k+1).$$

另一方面, 由引理 4.4 得 $\mathrm{vol}(S^2, \tilde{g}(t_k)) = 8\pi$, 矛盾! □

最后, 我们证明当 $t \to 1$ 时, 调整的度量 $\tilde{g}(t) = \dfrac{1}{1-t} g(t)$ 的数量曲率收敛于1.

命题 4.10 当 $t \to 1$ 时, 有

$$\sup_{S^2} |(1-t)\, \mathrm{scal}_{g(t)} - 1| \to 0.$$

证明 我们利用反证法. 如果结论不成立, 那么存在实数 $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 和时间序列 $\tau_k \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 1$, 并且对所有 k, 有

$$\sup_{S^2} |(1-\tau_k)\, \mathrm{scal}_{g(\tau_k)} - 1| > 2\varepsilon. \tag{28}$$

对每个 k, 存在实数 $t_k \in [2\tau_k - 1, \tau_k]$, 使得 $\mathscr{M}(t_k) = \inf_{t\in[2\tau_k-1,\tau_k]} \mathscr{M}(t)$. 这意味着对所有 k, 有

$$(1-t_k)\mathscr{M}(t_k) \leqslant 2(1-\tau_k)\mathscr{M}(t_k) \leqslant 2\int_{2\tau_k-1}^{\tau_k} \mathscr{M}(t)dt.$$

并且, 由引理 4.5 和命题 4.7 知

$$\int_0^1 \mathscr{M}(t)dt < \infty.$$

结合所有的事实, 我们得到, 当 $k \to \infty$ 时, 有

$$(1-t_k)\mathscr{M}(t_k) \to 0. \tag{29}$$

如果需要, 我们选取子列, 使得调整的度量 $\tilde{g}(t_k) = \dfrac{1}{1-t_k} g(t_k)$ 在 Cheeger-Gromov 的意义下, 收敛于 S^2 上的光滑度量 $\overline{g}$ (见 [2], 定理 2.2; [49], 定理 16.1). 由 (29) 得, $(S^2, \overline{g})$ 是梯度 Ricci 孤立子. 并且, 我们有 $\mathrm{vol}(S^2, \overline{g}) = 8\pi$. 从而, 由命题 4.3 知, 极限度量 $\overline{g}$ 具有常数量曲率 1.

因此, 如果 k 充分大, 那么在 S^2 上的任意点, 我们有

$$\frac{1-2\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-t_k)} \leqslant \mathrm{scal}_{g(t_k)} \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-t_k)}.$$

利用极值原理, 对 S^2 上的所有点, 有

$$\frac{1-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon)(1-\tau_k)+\varepsilon(1-t_k)} \leqslant \mathrm{scal}_{g(\tau_k)} \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{(1+2\varepsilon)(1-\tau_k)-\varepsilon(1-t_k)}.$$

因为 $1-t_k \leqslant 2(1-\tau_k)$, 所以

$$\frac{1-2\varepsilon}{1-\tau_k} \leqslant \mathrm{scal}_{g(\tau_k)} \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{1-\tau_k}.$$

与 (28) 矛盾. 证明完毕. □

4.3 收敛于常曲率度量

同前面一节一样, 我们假设 g_0 是 S^2 上具有正数量曲率的黎曼度量, 并且 $\mathrm{vol}(S^2, g(t_k)) = 8\pi$. 我们还假设 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 注意到由命题 4.8 可知 $T = 1$.

设 f 是 (21) 中定义的势函数. 该函数满足

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \Delta f + \frac{1}{1-t} f + 常数.$$

像 (22) 一样, 我们定义 M 是 f 的 Hessian 矩阵的无迹部分. 我们将首先给出张量 M 的发展方程 (见 [46], 第 9 节).

引理 4.11 张量 M 满足下面的发展方程:

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}} M = \Delta M + \frac{1}{1-t} M - \mathrm{scal}\, M.$$

证明 为简单起见, 令 $\overline{M} = D^2 f$ 表示 f 的 Hessian 矩阵. 并且, 固定 S^2 上的两个向量场 X, Y. 利用命题 2.9, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\overline{M}(X,Y) &= D^2_{X,Y}\left(\frac{\partial}{\partial t}f\right) - A(X,Y)(f)\\ &= D^2_{X,Y}(\Delta f) + \frac{1}{1-t}D^2_{X,Y}f\\ &\quad + \frac{1}{2}X(\mathrm{scal})Y(f) + \frac{1}{2}Y(\mathrm{scal})X(f) - \frac{1}{2}\langle d\mathrm{scal}, df\rangle g(X,Y).\end{aligned}$$

另一方面, 直接计算可得

$$\begin{aligned}(\Delta\overline{M})(X,Y) &= D^2_{X,Y}(\Delta f) + 2\,\mathrm{scal}\,M(X,Y)\\ &\quad + \frac{1}{2}X(\mathrm{scal})Y(f) + \frac{1}{2}Y(\mathrm{scal})X(f) - \frac{1}{2}\langle d\mathrm{scal}, df\rangle g(X,Y).\end{aligned}$$

结合上述事实, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{M}(X,Y) = (\Delta\overline{M})(X,Y) + \frac{1}{1-t}\overline{M}(X,Y) - 2\,\mathrm{scal}\,M(X,Y),$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial t}M(X,Y) = (\Delta M)(X,Y) + \frac{1}{1-t}M(X,Y) - 2\,\mathrm{scal}\,M(X,Y).$$

由此可得结论成立. □

引理 4.12 固定实数 $\alpha \in (0,1)$. 则存在正常数 C 使得, 对所有 $t \in [0,1)$, 有

$$\sup_{S^2}|M|^2 \leqslant C(1-t)^{2\alpha-2}.$$

证明 由命题 4.10, 存在实数 $\eta \in [0,1)$, 使得在 $S^2 \times [1-\eta, 1)$ 上, 有 $(1-t)\,\mathrm{scal} \geqslant \alpha$. 利用引理 4.11 知, 在 $S^2 \times [1-\eta, 1)$ 上, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(|M|^2) &= \Delta(|M|^2) - 2|DM|^2 + \frac{2}{1-t}|M|^2 - 2\,\mathrm{scal}\,|M|^2\\ &\leqslant \Delta(|M|^2) - 2|DM|^2 + \frac{2-2\alpha}{1-t}|M|^2.\end{aligned}$$

由极值原理知, 函数 $(1-t)^{2-2\alpha}|M|^2$ 是一致有上界的. □

命题 4.13 固定实数 $\alpha \in (0,1)$. 则存在正常数 C 使得

$$\sup_{S^2}\left(\mathrm{scal}_{g(t)} - \frac{1}{1-t}\right)^2 \leqslant C(1-t)^{2\alpha-2}.$$

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned}2\sum_{i,j=1}^{2}(D^2_{e_i,e_j}M)(e_i,e_j) &= \Delta\Delta f + \mathrm{scal}\,\Delta f + \langle d\mathrm{scal}, df\rangle \\ &= -\Delta\mathrm{scal} - \mathrm{scal}^2 + \frac{1}{1-t}\,\mathrm{scal} + \langle d\mathrm{scal}, df\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{scal} + \frac{1}{1-t}\,\mathrm{scal} + \langle d\mathrm{scal}, df\rangle.\end{aligned}$$

为简单起见, 记 $H = (1-t)M$, $h = (1-t)\,\mathrm{scal} - 1$. 则

$$2\sum_{i,j=1}^{2}(D^2_{e_i,e_j}H)(e_i,e_j) = -\frac{\partial}{\partial t}h + \langle dh, df\rangle.$$

由引理 4.12 知, 存在正常数 C_1, 使得对所有 $t \in [0,1)$, 有

$$\sup_{S^2}|H| \leqslant C_1(1-t)^{\alpha}.$$

利用引理 4.11 得到

$$D_{\frac{\partial}{\partial t}}H = \Delta H - \mathrm{scal}\,H.$$

由推论 3.6 知, 存在正常数 C_2, 使得对所有 $t \in [0,1)$, 有

$$\sup_{S^2}|D^2H|^2 \leqslant C_2(1-t)^{2\alpha-2}.$$

这意味着, 存在某正常数 C_3 使得

$$\left|-\frac{\partial}{\partial t}h + \langle dh, df\rangle\right| \leqslant C_3(1-t)^{\alpha-1}.$$

积分上述不等式, 可得对所有 $t \in [0,1)$ 和所有 $\tau \in [t,1)$, 有

$$\sup_{p\in S^2}|h(p,t)| \leqslant \sup_{q\in S^2}|h(q,\tau)| + \frac{C_3}{\alpha}[(1-t)^{\alpha} - (1-\tau)^{\alpha}].$$

现在令 $\tau \to 1$. 由命题 4.10 知, 当 $\tau \to 1$ 时, 有 $\sup_{q\in S^2} |h(q,\tau)| \to 0$. 从而, 对所有 $t \in [0,1)$, 我们有

$$\sup_{p\in S^2} |h(p,t)| \leqslant \frac{C_3}{\alpha}(1-t)^{\alpha}.$$

证明完毕. □

引理 4.14 固定实数 $\alpha \in (0,1)$. 任给整数 $m \geqslant 1$, 存在正常数 C 使得

$$\sup_{S^2} |D^m \operatorname{scal}_{g(t)}|^2 \leqslant C(1-t)^{2\alpha-m-2}.$$

证明 记 $h = (1-t)\operatorname{scal} - 1$. 由命题 4.13 知, 对所有 $t \in [0,1)$,

$$\sup_{S^2} |h| \leqslant C_1(1-t)^{\alpha}.$$

因为函数 h 满足发展方程

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \Delta h + \operatorname{scal} h.$$

所以, 由推论 3.6 得, 对所有 $t \in [0,1)$,

$$\sup_{S^2} |D^m h|^2 \leqslant C_2(1-t)^{2\alpha-m}.$$

由此可得结论成立. □

定理 4.15 (R. Hamilton [46]) 假设 g_0 是 S^2 上具有正数量曲率的黎曼度量, 并且 $\operatorname{vol}(S^2, g_0) = 8\pi$. 我们还假设 $g(t), t \in [0,T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 那么 $T = 1$, 并且调整的度量 $\frac{1}{1-t}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于具有常数量曲率 1 的度量.

证明 考虑调整的度量 $\tilde{g}(t) = \frac{1}{1-t}g(t)$. 则 $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = \omega(t)$, 其中

$$\omega(t) = -\frac{1}{1-t}\left(\operatorname{scal}_{g(t)} - \frac{1}{1-t}\right)g(t).$$

固定实数 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$. 由命题 4.13, 得

$$\sup_{t\in[0,1)} \left[(1-t)^{1-\alpha} \sup_M |\omega(t)|_{\tilde{g}(t)}\right] < \infty.$$

并且, 利用引理 4.14 可得, 对 $m = 1, 2, \cdots$,

$$\sup_{t\in[0,1)}\left[(1-t)^{1-\alpha}\sup_{M}|D^m\omega(t)|_{\tilde{g}(t)}\right]<\infty.$$

由命题 A.5, 度量 $\tilde{g}(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于 S^2 上的度量 $\overline{g}$. 由命题 4.10, 度量 $\overline{g}$ 具有常数量曲率 1. □

注意到在定理 4.15 的证明中, 我们没有用到单值化定理. 并且, 如果我们去掉假设条件 "$g(0)$ 具有正数量曲率", 定理 4.15 仍然成立. 事实上, S^2 上的 Ricci 流的任何解都收敛于调整后的常曲率度量 (见 [4, 6, 30, 48, 82]). 尽管如此, 这个结果不能推广到轨形上去. 大家熟知, 在二维轨形上 Ricci 流的任何解都收敛于 Ricci 孤立子 (见 [31, 86]).

第五章　曲率的逐点估计

5.1　简介

为了研究 Ricci 流的整体性质, 我们需要找到在 Ricci 流下保持不变的曲率条件. 在这一章中, 我们将给出一些发现不变曲率条件的技巧. 这些技巧依赖于极值原理, 是由 R. Hamilton [45] 所发现的 (见 [85], 第 9 章).

在第 5.2 节, 我们定义一个凸集的切锥, 并讨论它的一些基本的性质. 进一步地, 我们将给出一个集合在 ODE 下不变的充分必要条件. 在第 5.3 节, 我们给出 Hamilton 关于 Ricci 流的极值原理. 最后, 在第 5.4 节, 我们给出一个夹集合的概念, 并且将讨论 Hamilton 关于 Ricci 流的收敛性准则. 本章中给出的证明依赖于第三章中的内估计. 而 Hamilton 的原始证明则用到了爆破的论证 (见 [45, 50]).

5.2　凸集的切锥和法锥

下面, 设 X 表示一个赋予内积的有限维向量空间.

定义 5.1 设 F 是 X 中的一闭凸集. 对每个点 $y \in F$, 定义

$$N_yF = \{z \in X: \text{对所有的点 } x \in F, \text{ 有 } \langle x-y, z\rangle \geqslant 0\}$$

和

$$T_yF = \{x \in X: \text{对所有的点 } z \in N_yF, \text{ 有 } \langle x, z\rangle \geqslant 0\}.$$

我们将锥 N_yF 看成是 F 在 y 点的法锥, 而 T_yF 称为 F 在 y 点的切锥.

注意到 N_yF 和 T_yF 都是闭凸集. 如果 y 落在 F 的内部, 那么 $N_yF = \{0\}$, 而 $T_yF = X$.

引理 5.2 设 F 是 X 的一闭凸子集. 设 $y \in F$, $z \in X$, 则下面的两个结论是等价的:

(i) $d(z, F) = |y - z|$.

(ii) $y - z \in N_yF$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 任给点 $x \in F$. 因为 F 是凸集, 所以对所有 $s \in [0, 1]$, 有 $sx + (1-s)y \in F$. 这意味着

$$|sx + (1-s)y - z| \geqslant d(z, F) = |y - z|.$$

从而, 对所有 $x \in F$, 我们有

$$\langle x - y, y - z\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|sx + (1-s)y - z|^2\Big|_{s=0} \geqslant 0.$$

因此 $y - z \in N_yF$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): 因为 $y-z \in N_yF$, 所以对所有 $x \in F$, 我们有 $\langle x-y, y-z\rangle \geqslant 0$. 这意味着

$$|x - z|^2 = |x - y|^2 + 2\langle x - y, y - z\rangle + |y - z|^2 \geqslant |y - z|^2.$$

对所有 $x \in F$ 取下确界, 有 $d(z, F) \geqslant |y-z|$. 因为 $y \in F$, 所以 $d(z, F) = |y-z|$. 证明完毕. □

引理 5.3 设 F 是 X 的一闭凸子集. 设 $y \in F$, $z \in X$, 并且 $d(z, F) = |y - z|$. 那么对所有点 $\tilde{z} \in X$, 有

$$0 \leqslant d(\tilde{z}, F)|y - z| + \langle \tilde{z} - y, y - z \rangle.$$

证明 由引理 5.2 知 $y - z \in N_y F$. 这意味着对所有 $x \in F$, 有

$$0 \leqslant \langle x - y, y - z \rangle \leqslant |x - \tilde{z}|\, |y - z| + \langle \tilde{z} - y, y - z \rangle.$$

对所有点 $x \in F$ 取下确界, 即可得结论成立. □

命题 5.4 设 F 是 X 的一闭凸子集, $x(t), t \in [0, T)$, 是 X 中的一光滑路径, 满足 $x(0) \in F$. 则下列结论成立:

(i) 如果对所有 $t \in [0, T)$, 有 $x(t) \in F$, 则 $x'(0) \in T_{x(0)} F$.

(ii) 如果 $x'(0)$ 是切锥 $T_{x(0)} F$ 的内点, 则存在实数 $\varepsilon \in (0, T)$, 使得对所有 $t \in [0, \varepsilon]$, 有 $x(t) \in F$.

证明 (i) 假设对所有 $t \in [0, T)$ 有 $x(t) \in F$. 则对所有 $z \in N_{x(0)} F$ 和所有 $t \in [0, T)$, 有 $\langle x(t) - x(0), z \rangle \geqslant 0$. 这意味着

$$\langle x'(0), z \rangle = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \langle x(t) - x(0), z \rangle \geqslant 0.$$

所以 $x'(0) \in T_{x(0)} F$.

(ii) 我们用反证法. 假设 $x'(0)$ 是切锥 $T_{x(0)} F$ 的内点. 我们还假设存在实数序列 $t_k \in (0, T)$, 使得 $\lim_{k \to \infty} t_k = 0$, 并且对所有 k, 有 $x(t_k) \notin F$. 对每个 k, 存在点 $y_k \in F$, 使得 $d(x(t_k), F) = |y_k - x(t_k)| > 0$. 定义

$$z_k = \frac{y_k - x(t_k)}{|y_k - x(t_k)|}.$$

由引理 5.2 知 $z_k \in N_{y_k} F$. 因为 $x(0) \in F$, 所以对所有 k, 有 $\langle x(0) - y_k, z_k \rangle \geqslant 0$. 更进一步, 由 z_k 的定义知 $\langle y_k - x(t_k), z_k \rangle \geqslant 0$. 结合所有的事实得到 $\langle x(t_k) - x(0), z_k \rangle \leqslant 0$.

因为 $x(0) \in F$, 所以 $\lim_{k \to \infty} y_k = x(0)$. 如果需要, 选取子列. 我们假设序列 z_k 收敛于一单位向量 $z \in X$. 因为 $z_k \in N_{y_k} F$, 所以 $z \in N_{x(0)} F$.

由于 $x'(0)$ 在切锥 $T_{x(0)}F$ 的内部, 因此 $\langle x'(0), z\rangle > 0$. 另一方面, 我们有 $\langle x(t_k) - x(0), z_k\rangle \leqslant 0$, 这意味着

$$\langle x'(0), z\rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k}\langle x(t_k) - x(0), z_k\rangle \leqslant 0.$$

矛盾! 证明完毕. □

在这一节的最后部分, 我们考虑光滑向量场 $\Phi : X \to X$. 下面的结果给出了一闭集 F 在 ODE $x'(t) = \Phi(x(t))$ 下不变的充分必要条件.

命题 5.5 设 F 是 X 的一闭子集, 则下列结论等价:

(i) 集合 F 在 ODE $\frac{d}{dt}x(t) = \Phi(x(t))$ 下不变.

(ii) 对所有满足 $d(z, F) = |y - z|$ 的点 $y \in F, z \in X$, 有 $\langle \Phi(y), y - z\rangle \geqslant 0$.

证明 (i) ⇒ (ii): 设点 $y \in F, z \in X$ 满足 $d(z, F) = |y - z|$. 记 $x(t), t \in [0, T)$, 是 ODE $x'(t) = \Phi(x(t))$ 的具有初值 $x(0) = y$ 的唯一解. 因为 F 是不变集, 所以对所有 $t \in [0, T)$, 有 $x(t) \in F$. 这意味着

$$|x(t) - z| \geqslant d(z, F) = |y - z| = |x(0) - z|.$$

从而有

$$\langle \Phi(y), y - z\rangle = \langle x'(0), x(0) - z\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t) - z|^2\Big|_{t=0} \geqslant 0.$$

(ii) ⇒ (i): 记 $x(t), t \in [0, T)$, 是 ODE $x'(t) = \Phi(x(t))$ 的解, 满足初值 $x(0) \in F$. 断言: 对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $x(t) \in F$. 我们利用反证法. 假设存在某个 $\tau \in [0, T)$, 使得 $x(\tau) \notin F$. 对充分大的 k, 定义时间序列 t_k 为

$$t_k = \sup\{t \in [0, \tau] : d(x(t), F) \leqslant e^{kt-k^2}\}.$$

显而易见, $t_k \in (0, \tau)$, 并且当 k 充分大时, 有 $d(x(t_k), F) = e^{kt_k-k^2} > 0$. 因为 F 是闭集, 所以存在点 $y_k \in F$ 使得 $d(x(t_k), F) = |y_k - x(t_k)| > 0$.

由 t_k 的定义知, 对所有 $t \in [t_k, \tau]$, 有

$$e^{k(t_k-t)}|y_k - x(t)| \geqslant e^{k(t_k-t)}d(x(t), F) \geqslant d(x(t_k), F) = |y_k - x(t_k)|.$$

从而,

$$\begin{aligned}&k|y_k - x(t_k)|^2 + \langle x'(t_k), y_k - x(t_k)\rangle \\ =& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(e^{2k(t_k-t)}|y_k - x(t)|^2\right)\Big|_{t=t_k} \leqslant 0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\langle \Phi(x(t_k)), y_k - x(t_k)\rangle \leqslant -k|y_k - x(t_k)|^2.$$

由假设条件知

$$\langle \Phi(y_k), y_k - x(t_k)\rangle \geqslant 0.$$

结合所有的事实, 得到

$$\langle \Phi(y_k) - \Phi(x(t_k)), y_k - x(t_k)\rangle \geqslant k|y_k - x(t_k)|^2.$$

这与 Φ 的 Lipschitz 连续性矛盾! □

当考虑特殊情形时, 即如果 F 是一凸集, 那么我们可以得到下面的结论:

推论 5.6 假设 F 是 X 的一闭凸子集, 那么下面的结论等价:
(i) 集合 F 在 ODE $\frac{d}{dt}x(t) = \Phi(x(t))$ 下不变.
(ii) 对所有点 $y \in F$, 我们有 $\Phi(y) \in T_yF$.

5.3 Hamilton 的 Ricci 流极值原理

假设 V 是一个赋予内积的有限维向量空间. 我们记 $\mathscr{C}(V)$ 为所有双线性型 R 构成的空间, 其中 $R: V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ 满足

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Z, W, X, Y),$$

其中 $X, Y, Z, W \in V$. 并且, 我们还定义 $\mathscr{C}_B(V)$ 为所有满足下述等式的双线性型 $R \in \mathscr{C}(V)$ 构成的空间:

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0,$$

其中 $X, Y, Z, W \in V$. 换句话说, $\mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的代数曲率张量的空间 (见 [13], 定义 1.108).

设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组单位正交基. 任给代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(V)$, 定义

$$R^2(X, Y, Z, W) = \sum_{p,q=1}^{n} R(X, Y, e_p, e_q) R(Z, W, e_p, e_q)$$

和

$$\begin{aligned} R^\sharp(X, Y, Z, W) = 2 &\sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, Z, e_q) R(Y, e_p, W, e_q) \\ -2 &\sum_{p,q=1}^{n} R(X, e_p, W, e_q) R(Y, e_p, Z, e_q), \end{aligned}$$

其中 $X, Y, Z, W \in V$. 我们记

$$Q(R) = R^2 + R^\sharp.$$

注意到 R^2 和 $R^\sharp$ 都属于空间 $\mathscr{C}(V)$, 但是不一定属于 $\mathscr{C}_B(V)$. 而 $Q(R) = R^2 + R^\sharp$ 属于空间 $\mathscr{C}_B(V)$:

命题 5.7 设 $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的代数曲率张量, 则

$$Q(R)(X, Y, Z, W) + Q(R)(Y, Z, X, W) + Q(R)(Z, X, Y, W) = 0,$$

其中 $X, Y, Z, W \in V$. 从而, $Q(R) \in \mathscr{C}_B(V)$.

证明 由 $R^\sharp$ 的定义知

$$\begin{aligned} &R^\sharp(X, Y, Z, W) + R^\sharp(Y, Z, X, W) + R^\sharp(Z, X, Y, W) \\ = &2 \sum_{p,q=1}^{n} [R(Y, e_p, X, e_q) - R(X, e_p, Y, e_q)] R(Z, e_p, W, e_q) \\ &+2 \sum_{p,q=1}^{n} [R(Z, e_p, Y, e_q) - R(Y, e_p, Z, e_q)] R(X, e_p, W, e_q) \\ &+2 \sum_{p,q=1}^{n} [R(X, e_p, Z, e_q) - R(Z, e_p, X, e_q)] R(Y, e_p, W, e_q). \end{aligned}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
& R^{\sharp}(X,Y,Z,W)+R^{\sharp}(Y,Z,X,W)+R^{\sharp}(Z,X,Y,W)\\
=& \sum_{p,q=1}^{n}[R(Y,e_p,X,e_q)-R(X,e_p,Y,e_q)][R(Z,e_p,W,e_q)-R(W,e_p,Z,e_q)]\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}[R(Z,e_p,Y,e_q)-R(Y,e_p,Z,e_q)][R(X,e_p,W,e_q)-R(W,e_p,X,e_q)]\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}[R(X,e_p,Z,e_q)-R(Z,e_p,X,e_q)][R(Y,e_p,W,e_q)-R(W,e_p,Y,e_q)].
\end{aligned}
$$

因为 R 满足第一 Bianchi 恒等式, 所以

$$
\begin{aligned}
& R^{\sharp}(X,Y,Z,W)+R^{\sharp}(Y,Z,X,W)+R^{\sharp}(Z,X,Y,W)\\
=&-\sum_{p,q=1}^{n}R(X,Y,e_p,e_q)R(Z,W,e_p,e_q)\\
&-\sum_{p,q=1}^{n}R(Y,Z,e_p,e_q)R(X,W,e_p,e_q)\\
&-\sum_{p,q=1}^{n}R(Z,X,e_p,e_q)R(Y,W,e_p,e_q).
\end{aligned}
$$

所以, 我们可得

$$
\begin{aligned}
& R^{\sharp}(X,Y,Z,W)+R^{\sharp}(Y,Z,X,W)+R^{\sharp}(Z,X,Y,W)\\
=& -R^{2}(X,Y,Z,W)-R^{2}(Y,Z,X,W)-R^{2}(Z,X,Y,W).
\end{aligned}
$$

证明完毕. □

定义 5.8 空间 $\mathscr{C}_B(V)$ 上的微分方程 $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 称为 Hamilton ODE.

固定一闭凸集 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 并且在 $\mathrm{O}(n)$ 作用下是不变的. 假设 M 是 n 维紧致流形, $g(t), t \in [0,T)$, 是 M 上 Ricci 流的解. 对每个点 $(p,t) \in M \times (0,T)$, 我们可找到从 $\mathbb{R}^n$ 到 $E_{(p,t)}$ 的线性等距. 这将诱导从 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathscr{C}_B(E_{(p,t)})$ 的线性等距. 记 $F_{(p,t)} \subset \mathscr{C}_B(E_{(p,t)})$ 是集合 $F \subset$

$\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 在该线性等距下的像. 因为 F 是 $O(n)$ 不变的, 所以 $F_{(p,t)}$ 是有意义的, 即 $F_{(p,t)}$ 是不依赖于从 $\mathbb{R}^n$ 到 $E_{(p,t)}$ 的线性等距的选取的.

命题 5.9 假设 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是一闭凸集, 并且在 $O(n)$ 作用下是不变的. 假设 M 是 n 维紧致流形, $g(t), t \in [0,T)$, 是 M 上 Ricci 流的解. 设 (p_0,t_0) 是 $M\times(0,T)$ 中的点, 具有性质: 对所有点 $(p,t) \in M\times[0,t_0]$, 有

$$e^{\mu(t_0-t)}d(R_{(p,t)}, F_{(p,t)}) \leqslant d(R_{(p_0,t_0)}, F_{(p_0,t_0)}).$$

我们还假设 $S \in F_{(p_0,t_0)}$ 是一个代数曲率张量, 满足 $d(R_{(p_0,t_0)}, F_{(p_0,t_0)}) = |S - R_{(p_0,t_0)}|$. 那么, 下面的结论成立:

(i) $\langle D_{\frac{\partial}{\partial t}}R_{(p_0,t_0)}, S - R_{(p_0,t_0)}\rangle \leqslant -\mu|S - R_{(p_0,t_0)}|^2$.

(ii) $\langle D^2_{v,v}R_{(p_0,t_0)}, S - R_{(p_0,t_0)}\rangle \geqslant 0$, 对所有 $v \in T_{p_0}M$.

证明 (i) 设 D 是由 (6) 定义的联络. 对每个 $s \in [0,t_0)$, 记 $P(s)$: $\mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)}) \to \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0-s)})$ 是在联络 D 下的平行移动. 并且, 我们定义一个代数曲率张量 $H(s) \in \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)})$ 为

$$P(s)H(s) = R_{(p_0,t_0-s)} \in \mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0-s)}),$$

其中 $s \in [0,t_0)$. 显然, $H(0) = R_{(p_0,t_0)}$. 因为 F 是 $O(n)$ 不变的, 所以, 对所有 $s \in [0,t_0)$, 有 $P(s)F_{(p_0,t_0)} = F_{(p_0,t_0-s)}$. 这意味着

$$\begin{aligned} e^{\mu s}d(H(s), F_{(p_0,t_0)}) &= e^{\mu s}d(R_{(p_0,t_0-s)}, F_{(p_0,t_0-s)}) \\ &\leqslant d(R_{(p_0,t_0)}, F_{(p_0,t_0)}) \\ &= |S - H(0)|. \end{aligned} \tag{30}$$

并且, 由引理 5.3 知

$$0 \leqslant d(H(s), F_{(p_0,t_0)})|S - H(0)| + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle. \tag{31}$$

联立 (30) 和 (31) 得

$$0 \leqslant e^{-\mu s}|S - H(0)|^2 + \langle H(s) - S, S - H(0)\rangle,$$

当 $s=0$ 时, 等号成立. 这意味着

$$\begin{aligned}&-\mu|S-H(0)|^2+\langle H'(0),S-H(0)\rangle\\&=\frac{d}{ds}\Big(e^{-\mu s}|S-H(0)|^2+\langle H(s)-S,S-H(0)\rangle\Big)\Big|_{s=0}\geqslant 0.\end{aligned}$$

注意到 $H'(0)=-D_{\frac{\partial}{\partial t}}R_{(p_0,t_0)}$. 结合所有的事实, 可得结论成立.

(ii) 固定向量 $v\in T_{p_0}M$, 设 $\gamma:\mathbb{R}\to M$ 是在度量 $g(t_0)$ 下的测地线, 满足 $\gamma(0)=p_0,\gamma'(0)=v$. 对每个 $s\in R$, 记 $P(s):\mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)})\to\mathscr{C}_B(E_{(\gamma(s),t_0)})$ 为沿 γ 的平行移动. 并且, 我们定义代数曲率张量 $H(s)\in\mathscr{C}_B(E_{(p_0,t_0)})$: 对每个 $s\in\mathbb{R}$,

$$P(s)H(s)=R_{(\gamma(s),t_0)}\in\mathscr{C}_B(E_{(\gamma(s),t_0)}).$$

显然, $H(0)=R_{(p_0,t_0)}$. 因为 F 是 $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 所以, 对所有 $s\in R$, 有 $P(s)F_{(p_0,t_0)}=F_{(\gamma(s),t_0)}$. 这意味着

$$\begin{aligned}d(H(s),F_{(p_0,t_0)})&=d(R_{(\gamma(s),t_0)},F_{(\gamma(s),t_0)})\\&\leqslant d(R_{(p_0,t_0)},F_{(p_0,t_0)})\\&=|S-H(0)|.\end{aligned}\tag{32}$$

并且, 由引理 5.3 知

$$0\leqslant d(H(s),F_{(p_0,t_0)})|S-H(0)|+\langle H(s)-S,S-H(0)\rangle.\tag{33}$$

联立 (32) 和 (33) 得

$$0\leqslant|S-H(0)|^2+\langle H(s)-S,S-H(0)\rangle,$$

当 $s=0$ 时, 等号成立. 因此, 我们可以得到

$$\langle H''(0),S-H(0)\rangle=\frac{d^2}{ds^2}\langle H(s)-S,S-H(0)\rangle\Big|_{s=0}\geqslant 0.$$

注意到 $H''(0)=D^2_{v,v}R_{(p_0,t_0)}$. 从而 (ii) 成立. □

下面我们描述这一节的主要结果. 断言: 一曲率条件在 Ricci 流下保持不变, 如果相应的集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是凸集, 并且在 Hamilton ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下不变.

定理 5.10 (R. Hamilton [45]) 假设 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是闭凸集, $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 并且在 Hamilton ODE 下不变. 假设 M 是 n 维紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上 Ricci 流的解, 满足对所有点 $p \in M$, 有 $R_{(p,0)} \in F_{(p,0)}$. 则对所有点 $p \in M$ 和所有 $t \in [0, T)$, 有 $R_{(p,t)} \in F_{(p,t)}$.

证明 定义函数 $u : [0, T) \to \mathbb{R}$:

$$u(t) = \sup_{p \in M} d(R_{(p,t)}, F_{(p,t)}), \quad t \in [0, T).$$

由假设知 $u(0) = 0$. 断言: 对所有 $t \in [0, T)$, 有 $u(t) = 0$. 我们利用反证法. 假设存在实数 $\tau \in (0, T)$, 使得 $u(\tau) > 0$. 对充分大的 k, 定义时间序列 t_k :

$$t_k = \inf\{t \in [0, T) : u(t) \geqslant e^{kt-k^2}\}.$$

易见, $t_k \in (0, \tau)$, 并且如果 k 充分大, $u(t_k) = e^{kt_k-k^2} > 0$. 因为 M 是紧致的, 所以存在 $p_k \in M$ 使得 $u(t_k) = d(R_{(p_k,t_k)}, F_{(p_k,t_k)})$. 因为 F 是闭集, 所以存在代数曲率张量 $S_k \in F_{(p_k,t_k)}$, 使得

$$u(t_k) = d(R_{(p_k,t_k)}, F_{(p_k,t_k)}) = |S_k - R_{(p_k,t_k)}| > 0.$$

由 (p_k, t_k) 的定义知, 对所有 $(p, t) \in M \times [0, t_k]$, 有

$$e^{k(t_k-t)} d(R_{(p,t)}, F_{(p,t)}) \leqslant e^{k(t_k-t)} u(t) \leqslant u(t_k) = d(R_{(p_k,t_k)}, F_{(p_k,t_k)}).$$

所以, 由命题 5.9 得到

$$\langle D_{\frac{\partial}{\partial t}} R_{(p_k,t_k)}, S_k - R_{(p_k,t_k)} \rangle \leqslant -k|S_k - R_{(p_k,t_k)}|^2 \tag{34}$$

和

$$\langle \Delta R_{(p_k,t_k)}, S_k - R_{(p_k,t_k)} \rangle \geqslant 0. \tag{35}$$

(34) 减去 (35) 得到

$$\langle Q(R_{(p_k,t_k)}), S_k - R_{(p_k,t_k)}\rangle \leqslant -k|S_k - R_{(p_k,t_k)}|^2. \tag{36}$$

由假设条件知, 集合 F 在 Hamilton ODE 下是不变的. 所以由命题 5.5, 我们有

$$\langle Q(S_k), S_k - R_{(p_k,t_k)}\rangle \geqslant 0. \tag{37}$$

(37) 减去 (36) 得到

$$\langle Q(S_k) - Q(R_{(p_k,t_k)}), S_k - R_{(p_k,t_k)}\rangle \geqslant k|S_k - R_{(p_k,t_k)}|^2.$$

这与 Q 的 Lipschitz 连续性矛盾. 所以, 对所有 $t \in [0,T)$, 有 $u(t) = 0$. □

5.4 Hamilton 的 Ricci 流收敛准则

在这一节中, 我们给出一个一般的方法来证明在 Ricci 流下的收敛性结果. 这个技巧是由 R. Hamilton 给出的 (见 [45], 第 5 节). 我们首先给出两个定义.

定义 5.11 设 R 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个代数曲率张量, $\delta \in (0,1)$. 我们称 R 是严格 δ-夹的, 如果对所有的二维平面 $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^n$, 有 $0 < \delta K(\pi_1) < K(\pi_2)$. 并且, 我们称 R 是弱 δ-夹的, 如果对所有的二维平面 $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^n$, 有 $0 \leqslant \delta K(\pi_1) \leqslant K(\pi_2)$.

定义 5.12 集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 称为一个夹集合, 如果下面的条件成立:

- F 是闭凸集, 并且是 $\mathrm{O}(n)$ 不变的.
- F 在 Hamilton ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.
- 对每个 $\delta \in (0,1)$, 集合 $\{R \in F : R \text{ 不是弱 } \delta\text{-夹的}\}$ 是有界的.

设 M 是维数 $n \geqslant 3$ 的紧致流形, g_0 是其上的度量, 具有正的数量曲率. 假设 $g(t), t \in [0,T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 对每个点 $(p,t) \in M \times [0,T)$, 令 $K_{\max}(p,t)$ 表示 $g(t)$ 在点 p 处的最大的截面曲

率, 类似地, 令 $K_{\min}(p,t)$ 表示 $g(t)$ 在点 p 处的最小的截面曲率. 为简单起见, 定义

$$K_{\max}(t) = \sup_{p\in M} K_{\max}(p,t)$$

和

$$K_{\min}(t) = \inf_{p\in M} K_{\min}(p,t).$$

在这一节剩下的部分, 我们始终假设存在夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 使得对所有点 $p \in M$, 有 $R_{(p,0)} \in F_{(p,0)}$. 利用定理 5.10, 我们可得下面的结论:

引理 5.13　给定实数 $\delta \in (0,1)$, 存在正常数 C, 使得对所有点 $p \in M$ 和所有 $t \in [0,T)$, 有

$$K_{\min}(p,t) \geqslant \delta K_{\max}(p,t) - C.$$

证明　由定理 5.10 知, 对所有 $p \in M$ 和所有 $t \in [0,T)$, 有 $R_{(p,t)} \in F_{(p,t)}$. 因为 F 是一夹集合, 结论可由此得到. □

引理 5.14　$T < \infty$, $\limsup_{t\to T} K_{\max}(t) = \infty$.

证明　由假设知, g_0 具有正的数量曲率, 所以, 由命题 2.19 可得 $T < \infty$.

接下来我们证明 $\limsup_{t\to T} K_{\max}(t) = \infty$. 假设上式不成立, 则 $\sup_{t\in[0,T)} K_{\max}(t) < \infty$. 另一方面, 由引理 5.13 知 $\inf_{t\in[0,T)} K_{\min}(t) > -\infty$. 结合所有的事实, 我们得到 $\sup_{t\in[0,T)} |R_{g(t)}| < \infty$. 与定理 3.7 矛盾. □

引理 5.15　设 t_k 是一时间序列, 满足 $\lim_{k\to\infty} t_k = T$, 并且 $K_{\max}(t_k) \geqslant \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,t_k]} K_{\max}(t)$. p_k 是 M 中的点列, 满足 $K_{\max}(p_k,t_k) = K_{\max}(t_k)$. 定义

$$\Omega_k = \{x \in M : d_{g(t_k)}(p_k, x) \leqslant 2\pi K_{\max}(t_k)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

则

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\inf_{x\in\Omega_k} K_{\min}(x,t_k)}{K_{\max}(t_k)} \geqslant 1.$$

证明 固定实数 $\varepsilon > 0$. 由引理 5.13 知, 存在正常数 C_1, 使得对所有 $t \in [0, T)$, 有

$$\sup_M |\mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t)}| \leqslant \varepsilon K_{\max}(t) + C_1.$$

这意味着, 对所有 $t \in [0, t_k]$, 有

$$\sup_M |\mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t)}| \leqslant 2\varepsilon K_{\max}(t_k) + C_1.$$

由推论 2.17 知, Ricci 张量的无迹部分满足下面的发展方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathring{\mathrm{Ric}} = \Delta\mathring{\mathrm{Ric}} + R * \mathring{\mathrm{Ric}}.$$

所以, 由推论 3.6 知, 存在正常数 C_2, 使得

$$\sup_M |D\mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t_k)}|^2 \leqslant C_2 K_{\max}(t_k)(2\varepsilon K_{\max}(t_k) + C_1)^2.$$

利用命题 1.5 知, 存在正常数 C_3, 使得

$$\sup_M |d\mathrm{scal}_{g(t_k)}|^2 \leqslant C_3 K_{\max}(t_k)(2\varepsilon K_{\max}(t_k) + C_1)^2.$$

这意味着

$$\inf_{x\in\Omega_k} \mathrm{scal}_{g(t_k)}(x) \geqslant \mathrm{scal}_{g(t_k)}(p_k) - 2\pi\sqrt{C_3}(2\varepsilon K_{\max}(t_k) + C_1),$$

所以

$$\inf_{x\in\Omega_k} K_{\max}(x, t_k) \geqslant K_{\min}(p_k, t_k) - \frac{2\pi}{n(n-1)}\sqrt{C_3}(2\varepsilon K_{\max}(t_k) + C_1).$$

由引理 5.13 知, 存在正常数 C_4, 使得对所有点 $x \in M$, 有

$$K_{\min}(x, t_k) \geqslant (1 - \varepsilon)K_{\max}(x, t_k) - C_4.$$

特别地, 我们有

$$K_{\min}(p_k, t_k) \geqslant (1 - \varepsilon)K_{\max}(t_k) - C_4.$$

结合所有的事实, 我们得到

$$\inf_{x\in\Omega_k} K_{\min}(x,t_k) \geqslant (1-\varepsilon)^2 K_{\max}(x,t_k) - (2-\varepsilon)C_4 \\ -\frac{2\pi}{n(n-1)}\sqrt{C_3}(1-\varepsilon)(2\varepsilon K_{\max}(t_k)+C_1).$$

最后, 由引理 5.14 知 $\lim_{k\to\infty} K_{\max}(t_k)=\infty$. 所以, 我们得到

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\inf_{x\in\Omega_k} K_{\min}(x,t_k)}{K_{\max}(t_k)} \geqslant (1-\varepsilon)^2 - \frac{4\pi}{n(n-1)}\sqrt{C_3}(1-\varepsilon)\varepsilon.$$

注意到 $\varepsilon>0$ 是任意的, 我们可得结论成立. □

引理 5.16 设 t_k 是一时间序列, 满足 $\lim_{k\to\infty} t_k = T$, 并且对所有 k, $K_{\max}(t_k) \geqslant \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,t_k]} K_{\max}(t)$. 则

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} \geqslant 1.$$

证明 假设断言不成立. 如果有需要, 选取子列. 我们假设

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} < 1. \tag{38}$$

对每个 k, 选取点 $p_k\in M$, 使得 $K_{\max}(p_k,t_k)=K_{\max}(t_k)$. 定义

$$\Omega_k = \{x\in M : d_{g(t_k)}(p_k,x) \leqslant 2\pi K_{\max}(t_k)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

由引理 5.15 知

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\inf_{x\in\Omega_k} K_{\min}(x,t_k)}{K_{\max}(t_k)} \geqslant 1. \tag{39}$$

由 (38) 和 (39) 知, 如果 k 充分大, 有 $\Omega_k\neq M$. 所以, 如果 k 充分大, 存在点 $x_k\in M$, 使得 $d_{g(t_k)}(p_k,x_k)=2\pi K_{\max}(t_k)^{-\frac{1}{2}}$. 并且, 我们可找到测地线 $\gamma_k:[0,1]\to(M,g(t_k))$, 满足 $\gamma_k(0)=p_k$, $\gamma_k(1)=x_k$ 和

$$L_{g(t_k)}(\gamma_k) = d_{g(t_k)}(p_k,x_k) = 2\pi K_{\max}(t_k)^{-\frac{1}{2}}.$$

因为 γ_k 没有共轭点, 所以

$$\inf_{s\in[0,1]} K_{\min}(\gamma_k(s),t_k) \leqslant \pi^2 L_{g(t_k)}(\gamma_k)^{-2} = \frac{1}{4}K_{\max}(t_k).$$

并且对所有 $s \in [0,1]$, 有 $\gamma_k(s) \in \Omega_k$. 这意味着

$$\inf_{x \in \Omega_k} K_{\min}(x, t_k) \leqslant \inf_{s \in [0,1]} K_{\min}(\gamma_k(s), t_k) \leqslant \frac{1}{4} K_{\max}(t_k).$$

与 (39) 矛盾. □

命题 5.17 当 $t \to T$ 时, 有

$$\frac{K_{\min}(t)}{K_{\max}(t)} \to 1.$$

证明 假设断言不成立. 则存在时间序列 τ_k 使得 $\lim_{k\to\infty} \tau_k = T$, 并且

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{K_{\min}(\tau_k)}{K_{\max}(\tau_k)} < 1. \tag{40}$$

对每个 k, 存在实数 $t_k \in [0, \tau_k]$ 使得

$$K_{\max}(t_k) = \sup_{t \in [0,\tau_k]} K_{\max}(t).$$

由引理 5.14 知 $\lim_{k\to\infty} K_{\max}(t_k) = \infty$. 由此可知 $\lim_{k\to\infty} t_k = T$. 利用引理 5.16, 我们有

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{K_{\min}(t_k)}{K_{\max}(t_k)} \geqslant 1.$$

特别地, 如果 k 充分大, 我们有 $K_{\min}(t_k) \geqslant \frac{1}{2} K_{\max}(t_k)$. 因为数量曲率的最小值关于时间是递增的, 所以我们有

$$\inf_{x \in M} \mathrm{scal}_{g(\tau_k)}(x) \geqslant \inf_{x \in M} \mathrm{scal}_{g(t_k)}(x),$$

从而

$$\inf_{x \in M} K_{\max}(x, \tau_k) \geqslant \inf_{x \in M} K_{\min}(x, t_k).$$

结合所有的事实, 得到

$$K_{\max}(\tau_k) \geqslant K_{\min}(t_k) \geqslant \frac{1}{2} K_{\max}(t_k) = \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,\tau_k]} K_{\max}(t).$$

所以, 由引理 5.16, 我们有

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{K_{\min}(\tau_k)}{K_{\max}(\tau_k)} \geqslant 1.$$

与 (40) 矛盾. □

接下来, 我们将在曲率爆破时刻估计 $g(t)$ 的数量曲率.

引理 5.18 当 $t \to T$ 时, 有

$$(T-t)\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)} \to \frac{n}{2}$$

和

$$(T-t)\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)} \to \frac{n}{2}.$$

证明 固定实数 $\varepsilon > 0$. 由命题 5.17 知, 存在实数 $\eta > 0$, 使得在 $M \times [T-\eta, T)$ 上, 有 $|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{n}\mathrm{scal}^2$. 利用推论 2.16 知, 在 $M \times [T-\eta, T)$ 上, 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{scal} = \Delta\mathrm{scal} + 2|\mathrm{Ric}|^2 \leqslant \Delta\mathrm{scal} + \frac{2(1+\varepsilon)}{n}\mathrm{scal}^2.$$

所以, 对所有 $t \in [T-\eta, T)$ 和所有 $\tau \in [t, T)$, 利用极值原理得

$$\frac{n}{2\sup_M \mathrm{scal}_{g(\tau)}} + (1+\varepsilon)(\tau - t) \geqslant \frac{n}{2\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)}}.$$

现在我们对 $\tau \to T$ 取极限. 由引理 5.14, 我们有 $\limsup_{\tau\to T}\sup_M \mathrm{scal}_{g(\tau)} = \infty$. 这意味着, 对所有 $t \in [T-\eta, T)$, 有

$$(1+\varepsilon)(T-t) \geqslant \frac{n}{2\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)}}.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以

$$\liminf_{t\to T}\left[(T-t)\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)}\right] \geqslant \frac{n}{2}.$$

利用命题 5.17 知

$$\liminf_{t\to T}\left[(T-t)\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)}\right] \geqslant \frac{n}{2}. \tag{41}$$

另一方面, 由命题 2.19 知

$$T - t \leqslant \frac{n}{2\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)}}.$$

这意味着

$$\limsup_{t\to T}\left[(T-t)\inf_M \mathrm{scal}_{g(t)}\right] \leqslant \frac{n}{2}.$$

利用命题 5.17 知

$$\limsup_{t\to T}\left[(T-t)\sup_M \mathrm{scal}_{g(t)}\right]\leqslant\frac{n}{2}. \tag{42}$$

结合 (41) 和 (42), 我们可得结论. □

引理 5.19 固定实数 $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{n-1}\right)$. 则存在正常数 C, 使得对所有 $t\in[0,T)$, 有

$$\sup_M |\mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t)}|^2\leqslant C(T-t)^{2\alpha-2}.$$

证明 固定正实数 ε, 使得 $\left(1-\dfrac{1}{n-1}+n\varepsilon\right)(1+\varepsilon)\leqslant 1-\alpha$. 由引理 5.18 和命题 5.17 知, 存在实数 $\eta\in(0,T)$, 使得在 $M\times[T-\eta,T)$ 上, 有

$$(T-t)\mathrm{scal}\leqslant\frac{n(1+\varepsilon)}{2}$$

和

$$\left|R_{ijkl}-\frac{1}{n(n-1)}\,\mathrm{scal}\,(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})\right|^2\leqslant\varepsilon^2\,\mathrm{scal}^2.$$

这意味着

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left(R_{ijkl}-\frac{1}{n(n-1)}\,\mathrm{scal}\,(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})\right)\mathring{\mathrm{Ric}}^{ik}\mathring{\mathrm{Ric}}^{jl}\leqslant\varepsilon\,\mathrm{scal}\,|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2,$$

所以

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}R_{ijkl}\,\mathring{\mathrm{Ric}}^{ik}\mathring{\mathrm{Ric}}^{jl}\leqslant\left(-\frac{1}{n(n-1)}+\varepsilon\right)\mathrm{scal}\,|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.$$

从而, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}R_{ijkl}\mathring{\mathrm{Ric}}^{ik}\mathring{\mathrm{Ric}}^{jl}&\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n-1)}+\varepsilon\right)\mathrm{scal}\,|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\\&\leqslant\left(1-\frac{1}{n-1}+n\varepsilon\right)\frac{1+\varepsilon}{2(T-t)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\\&\leqslant\frac{1-\alpha}{2(T-t)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

利用命题 2.15 知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2)&=\Delta(|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2)-2|D\mathring{\mathrm{Ric}}|^2+4\sum_{i,j,k,l=1}^{n}R_{ijkl}\mathring{\mathrm{Ric}}^{ik}\mathring{\mathrm{Ric}}^{jl}\\&\leqslant\Delta(|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2)-2|D\mathring{\mathrm{Ric}}|^2+\frac{2-2\alpha}{T-t}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

由极值原理得, 函数 $(T-t)^{2-2\alpha}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2$ 是一致有上界的. □

引理 5.20 固定实数 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$. 任给整数 $m \geqslant 1$, 存在正常数 C, 使得对所有 $t \in [0, T)$, 有

$$\sup_M |D^m \mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t)}|^2 \leqslant C(T-t)^{2\alpha-m-2}.$$

证明 由引理 5.19 知, 存在正常数 C_1 使得

$$\sup_M |\mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t)}| \leqslant C_1(T-t)^{\alpha-1}.$$

由推论 2.17 知, Ricci 张量的无迹部分满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathring{\mathrm{Ric}} = \Delta\mathring{\mathrm{Ric}} + R * \mathring{\mathrm{Ric}}.$$

所以, 由推论 3.6 知

$$\sup_M |D^m\mathring{\mathrm{Ric}}_{g(t)}|^2 \leqslant C_2(T-t)^{2\alpha-m-2}$$

对所有 $t \in [0, T)$ 成立. □

引理 5.21 固定实数 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$. 任给整数 $m \geqslant 1$, 存在正常数 C, 使得对所有 $t \in [0, T)$, 有

$$\sup_M |D^m\mathrm{Ric}_{g(t)}|^2 \leqslant C(T-t)^{2\alpha-m-2}.$$

证明 由命题 1.5 知, 对所有的向量场 X, Y, Z, 有

$$(D_X\mathrm{Ric})(Y,Z) = (D_X\mathring{\mathrm{Ric}})(Y,Z) + \frac{2}{n-2}\sum_{k=1}^{n}(D_{e_k}\mathring{\mathrm{Ric}})(X, e_k)g(Y,Z).$$

因此, Ricci 曲率的协变导数可以表示为 Ricci 张量无迹部分的协变导数的组合. 所以, 由引理 5.20 可得结论成立. □

命题 5.22 固定实数 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$. 存在正常数 C, 使得对所有 $t \in [0, T)$, 有

$$\sup_M \left|\mathrm{Ric}_{g(t)} - \frac{1}{2(T-t)}g(t)\right|^2 \leqslant C(T-t)^{2\alpha-2}.$$

证明 由引理 5.19 知, 存在正常数 C_1 使得 $|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 \leqslant C_1(T-t)^{2\alpha-2}$. 并且, 由引理 5.21 知, 存在正常数 C_2 使得

$$|\Delta \mathrm{scal}| \leqslant C_2(T-t)^{\alpha-2}.$$

由推论 2.16 得

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{scal} - \frac{2}{n}\,\mathrm{scal}^2\right| \leqslant |\Delta \mathrm{scal}| + 2|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 \leqslant C_3(T-t)^{\alpha-2}.$$

利用引理 5.18 知, 存在正常数 C_4 使得

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mathrm{scal}}\right) + \frac{2}{n}\right| \leqslant C_4(T-t)^{\alpha}.$$

这意味着

$$\left|\frac{1}{\mathrm{scal}} - \frac{2}{n}(T-t)\right| \leqslant \frac{C_4}{\alpha+1}(T-t)^{\alpha+1}.$$

再次利用引理 5.18 得, 存在正常数 C_5 使得

$$\left|\mathrm{scal} - \frac{n}{2(T-t)}\right| \leqslant C_5(T-t)^{\alpha-1}.$$

因为 $|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 \leqslant C_1(T-t)^{2\alpha-2}$, 所以结论成立. □

我们下面给出这一章的主要结果:

定理 5.23 (R. Hamilton [45]) 假设 M 是维数 $n \geqslant 3$ 的紧致流形, g_0 是其上的黎曼度量, 具有正的数量曲率. 假设存在夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 使得对所有点 $p \in M$, g_0 的曲率张量都落在 F 中. 我们还设 $g(t), t \in [0,T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\dfrac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于常截面曲率 1 的度量.

证明 考虑调整的度量 $\tilde{g}(t) = \dfrac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$. 则 $\dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = \omega(t)$, 其中

$$\omega(t) = -\frac{1}{(n-1)(T-t)}\left(\mathrm{Ric}_{g(t)} - \frac{1}{2(T-t)}g(t)\right).$$

固定实数 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$. 由命题 5.22 知

$$\sup_{t\in[0,T)}\left[(T-t)^{1-\alpha}\sup_M |\omega(t)|_{\tilde{g}(t)}\right] < \infty.$$

并且, 由引理 5.21 知, 对 $m = 1, 2, \cdots$, 有

$$\sup_{t\in[0,T)}\left[(T-t)^{1-\alpha}\sup_{M}|D^m\omega(t)|_{\tilde{g}(t)}\right] < \infty.$$

由命题 A.5 得, 度量 $\tilde{g}(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于 M 上的度量 $\overline{g}$. 利用引理 5.18 得到, $\overline{g}$ 的数量曲率等于 $n(n-1)$. 并且, 从命题 5.17 可得, $\overline{g}$ 具有常截面曲率. 证明完毕. □

注意到, 定理 5.23 的证明并没有用到任何单射半径的估计, 所以, 该证明可以推广到轨形的情形. 轨形上的 Ricci 流在 [52] 中有详细的介绍.

第六章　三维的曲率夹条件

6.1 具有正 Ricci 曲率的三维流形

在这一章中, 我们将学习三维流形上的 Ricci 流理论. 三维情形是非常特殊的: 比如, 在三维时, Ricci 曲率张量决定了黎曼曲率张量.

引理 6.1 假设 R 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个代数曲率张量, 那么

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik} \\ &\quad - \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned}$$

证明 定义代数曲率张量 $W \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} + \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} + \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} - \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned}$$

则

$$W_{1212} = R_{1212} - \mathrm{Ric}_{11} - \mathrm{Ric}_{22} + \frac{1}{2}\,\mathrm{scal}$$

$$= R_{1212} - \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}_{11} + \mathrm{Ric}_{22} - \mathrm{Ric}_{33})$$
$$= 0.$$

所以, W 的截面曲率为 0, 因此, $W = 0$. □

利用引理 6.1, 可得下面关于 Ricci 张量的发展方程:

命题 6.2 假设 $R(t), t \in [0, T)$, 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 中 ODE $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ 的解, 则

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ric}_{ij} = -4\,\mathrm{Ric}_{ij}^2 + 3\,\mathrm{scal}\,\mathrm{Ric}_{ij} + 2|\mathrm{Ric}|^2\delta_{ij} - \mathrm{scal}^2\delta_{ij}.$$

证明 注意到

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ric}_{ij} = 2\sum_{p,q=1}^{3} R_{ipjq}\,\mathrm{Ric}_{pq}$$

(见命题 2.15). 并且, 由引理 6.1, 我们有

$$R_{ipjq} = \mathrm{Ric}_{ij}\delta_{pq} - \mathrm{Ric}_{iq}\delta_{jp} - \mathrm{Ric}_{jp}\delta_{iq} + \mathrm{Ric}_{pq}\delta_{ij}$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{scal}\,(\delta_{ij}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{jp}).$$

结合这些事实, 我们可得结论成立. □

任给代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$, 定义

$$A_{ij} = \mathrm{scal}\,\delta_{ij} - 2\,\mathrm{Ric}_{ij}.$$

并且, 我们假设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ 是 A 的特征根, 也可以将 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 看成 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 上的实值函数. 易见函数 $R \mapsto \lambda_1$ 是凹函数, $R \mapsto \lambda_3$ 是凸函数, 而它们的和 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{scal}$ 是 R 的线性函数.

命题 6.3 假设 $R(t), t \in [0, T)$, 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 中 ODE $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ 的解, 则对 $t \in [0, T)$, 有

$$\frac{d}{dt}A_{ij} = 2A_{ij}^2 - \mathrm{tr}(A)A_{ij} - \frac{1}{2}|A|^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)^2\delta_{ij}.$$

证明 由命题 6.2 知

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Ric}_{ij} = -4\operatorname{Ric}_{ij}^2 + 3\operatorname{scal}\operatorname{Ric}_{ij} + 2|\operatorname{Ric}|^2\delta_{ij} - \operatorname{scal}^2\delta_{ij}.$$

并且, 我们有

$$\frac{d}{dt}\operatorname{scal} = 2|\operatorname{Ric}|^2.$$

所以, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_{ij} &= 8\operatorname{Ric}_{ij}^2 - 6\operatorname{scal}\operatorname{Ric}_{ij} - 2|\operatorname{Ric}|^2\delta_{ij} + 2\operatorname{scal}^2\delta_{ij}\\ &= 2A_{ij}^2 - \operatorname{scal}A_{ij} - \frac{1}{2}|A|^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}\operatorname{scal}^2\delta_{ij}.\end{aligned}$$

因为 $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{scal}$, 所以结论得证. □

推论 6.4 假设 $R(t), t \in [0, T)$, 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 中 ODE $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ 的解, 则 $A(t)$ 的特征根满足

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\lambda_1(t) &= \lambda_1(t)^2 + \lambda_2(t)\lambda_3(t),\\ \frac{d}{dt}\lambda_2(t) &= \lambda_2(t)^2 + \lambda_3(t)\lambda_1(t),\\ \frac{d}{dt}\lambda_3(t) &= \lambda_3(t)^2 + \lambda_1(t)\lambda_2(t).\end{aligned}$$

证明 不失一般性, 假设 $A(0)$ 是对角化的, 并且 $A_{11}(0) \leqslant A_{22}(0) \leqslant A_{33}(0)$. 由命题 6.3 知, 对所有 $t \in [0, T)$, 有 $A(t)$ 是对角化的, 并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_{11}(t) &= A_{11}(t)^2 + A_{22}(t)A_{33}(t),\\ \frac{d}{dt}A_{22}(t) &= A_{22}(t)^2 + A_{33}(t)A_{11}(t),\\ \frac{d}{dt}A_{33}(t) &= A_{33}(t)^2 + A_{11}(t)A_{22}(t).\end{aligned}$$

因为 $A_{11}(0) \leqslant A_{22}(0) \leqslant A_{33}(0)$, 所以我们可以得到, 对所有 $t \in [0, T)$, $A_{11}(t) \leqslant A_{22}(t) \leqslant A_{33}(t)$. 而 $\lambda_1(t) = A_{11}(t), \lambda_2(t) = A_{22}(t), \lambda_3(t) = A_{33}(t)$. 结合这些事实, 我们可得结论成立. □

命题 6.5 固定实数 $\delta \in [0, 1]$. 则集合

$$\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2\delta\lambda_3\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 假设 $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\delta\lambda_3$, 利用推论 6.4 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\delta\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3)\lambda_3 \\ &= (1 - \delta)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \delta(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

由此可得结论成立. □

命题 6.6 固定实数 $\delta \in [0, 1]$, $N > 0$. 则集合

$$\left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2\delta\lambda_3,\ (\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} \leqslant N(\lambda_1 + \lambda_2)\right\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 由命题 6.5 知, 条件 $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2\delta\lambda_3$ 在 Hamilton ODE 下是保持的. 所以我们假设 $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2\delta\lambda_3$. 利用推论 6.4 得

$$\frac{d}{dt}\log(\lambda_3 - \lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant \lambda_3$$

和

$$\frac{d}{dt}\log(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3 \geqslant \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 \geqslant (1 + \delta)\lambda_3.$$

结合所有的事实, 我们得到

$$\frac{d}{dt}\Big[(1 + \delta)\log(\lambda_3 - \lambda_1) - \log(\lambda_1 + \lambda_2)\Big] \leqslant 0.$$

所以 $(\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta}/(\lambda_1 + \lambda_2)$ 是单调递减的, 由此可得结论成立. □

命题 6.7 假设 K 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 的一个紧致子集, 代数曲率张量 $R \in K$ 具有正的 Ricci 曲率. 那么存在夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 使得 $K \subset F$.

证明 由假设条件知

$$K \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 > 0\}.$$

因为 K 是紧致的, 存在实数 $\delta \in (0,1)$ 和 $N > 0$ 使得

$$K \subset \Big\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2\delta\lambda_3,\ (\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} \leqslant N(\lambda_1 + \lambda_2)\Big\}.$$

定义

$$F = \Big\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2\delta\lambda_3,\ (\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta} \leqslant N(\lambda_1 + \lambda_2)\Big\}.$$

函数 $R \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 - 2\delta\lambda_3$ 和函数 $R \mapsto N(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_3 - \lambda_1)^{1+\delta}$ 都是凹函数. 因此, 集合 F 是凸的. 并且, 由命题 6.6 知集合 F 在 ODE $\dfrac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的. 故 F 是一夹集合. □

定理 6.8 (R, Hamilton [44]) *假设 M 是一个三维紧致流形, g_0 是其上的黎曼度量, 具有正的 Ricci 曲率. 我们还设 $g(t), t \in [0,T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\dfrac{1}{4(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于常截面曲率 1 的度量.*

证明 由命题 6.7 知, 存在夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ 使得对所有点 $p \in M$, g_0 的曲率张量落在 F 中, 所以利用定理 5.23 即可得结论. □

6.2 Hamilton 和 Ivey 的曲率估计

在这一节中, 我们将描述在三维 Ricci 流中一个非常重要的曲率估计. 这个估计对任意初始度量都成立, 是由 R. Hamilton 和 T. Ivey 发现的 (见 [49], 第 24 节; [55]).

为叙述该结果, 我们定义函数 $f : (1,\infty) \to (-1,\infty)$:

$$f(x) = x\log x - x.$$

函数 f 是单调递增的, 并且是凸的. 记 $f^{-1} : (-1,\infty) \to (1,\infty)$ 是 f 的反函数. 注意到 f^{-1} 是单调递增的, 并且是凹函数. 更进一步, 对所有

$y \in (-1, \infty)$, 我们有

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\log(f^{-1}(y))}.$$

命题 6.9 集合

$$\left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant -\frac{1}{2},\ \lambda_1 + f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geqslant 0\right\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 注意到 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 在 Hamilton ODE 下是单调递增的, 所以条件 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \geqslant -\frac{1}{2}$ 是保持的. 下面我们将证明条件 $\lambda_1+f^{-1}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \geqslant 0$ 也是保持的. 为此, 假设 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant -\frac{1}{2}$ 和

$$\lambda_1 + f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0.$$

则 $\lambda_1 < -1$, 并且

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = f(-\lambda_1) = -\lambda_1 \log(-\lambda_1) + \lambda_1.$$

这意味着

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -\lambda_1 \log(-\lambda_1) > 0.$$

特别地, 有 $\lambda_3 > 0$. 利用链式法则, 得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) &= \frac{1}{\log(f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))} \frac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\
&= \frac{1}{\log(-\lambda_1)} \frac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\
&= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_3} \frac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).
\end{aligned}$$

所以, 从推论 6.4 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\lambda_1 + f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \\
&= \lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 - \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)}{\lambda_2 + \lambda_3} \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_3 - \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2 + \lambda_3} \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

□

命题 6.10 集合

$$\left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant -\frac{1}{2},\ \lambda_1 + f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geqslant 0\right\}$$

是凸的.

证明 注意到函数 $R \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 是线性的. 因为 $f^{-1} : (-1, \infty) \to (1, \infty)$ 是凹的, 所以函数 $R \mapsto f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ 是凹的. 并且函数 $R \mapsto \lambda_1$ 是凹的, 所以函数 $R \mapsto \lambda_1 + f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ 是凹的. 从而, 集合

$$\left\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3) : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant -\frac{1}{2},\ \lambda_1 + f^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geqslant 0\right\}$$

是凸的. □

推论 6.11 (R. Hamilton [49]; T. Ivey [55]) 假设 M 是一个三维紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上的 Ricci 流的解. 则存在仅依赖于初始度量 $g(0)$ 的正常数 N, 使得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant -\frac{1}{2}N \tag{43}$$

和

$$\lambda_1 + N f^{-1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{N}\right) \geqslant 0. \tag{44}$$

证明 选取充分大的 N, 使得当 $t = 0$ 时, 有 $\lambda_1 \geqslant -\frac{1}{6}N$. 则当 $t = 0$ 时不等式 (43) 和 (44) 是成立的. 由定理 5.10, 对所有时间 $t \in [0, T)$, 不等式 (43) 和 (44) 仍然是成立的. □



第七章　高维情形下曲率保持的条件

7.1　简介

在这一章中, 我们将介绍一些在 Ricci 流下保持的曲率条件. 在第 7.2 节, 我们首先给出非负的迷向曲率的概念. 这个曲率条件由 Micallef 和 Moore [60] 在他们研究调和二维球的 Morse 指标这篇经典文章中给出 (见 [35, 39]). 定理 7.7 告诉我们非负的迷向曲率在 Ricci 流是保持的. 这是这一章的一个重要的结果. 该结果的证明需要非常仔细的代数计算, 我们将在第 7.3 节中给出.

在第 7.4 节至第 7.6 节, 我们将给出一些相关的曲率条件. 在第 7.4 节, 我们考虑 $M \times \mathbb{R}$ 上具有非负的迷向曲率的条件. 在第 7.5 节, 我们考虑 $M \times \mathbb{R}^2$ 上具有非负的迷向曲率的条件. 在第 7.6 节, 我们考虑 $M \times S^2(1)$ 上具有非负的迷向曲率的条件. ($S^2(1)$ 表示常曲率为 1 的二维球面.) 这些曲率条件都在 Ricci 流下保持 (见 [17, 20]). 最后, 在第 7.7

节, 我们将通过一张图表展现这些曲率条件之间的一些蕴涵关系.

在这一章中, 我们将用到一些复线性代数的结果, 这些结果可在附录 B 中找到.

7.2 非负迷向曲率

在整个这一节中, 我们始终假设 V 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的赋予内积的向量空间.

定义 7.1 一个代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 称为具有非负的迷向曲率, 如果对所有单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$, 有

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.\end{aligned}$$

我们下面给出非负迷向曲率的另一种刻画. 令 $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 表示 V 的复化空间. 并且, 我们将内积 $g : V \times V \to \mathbb{R}$ 延拓成一个复的双线性型 $g : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. 最后, 任何的代数曲率张量 $R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ 可以延拓成一个复的多重线性型 $R : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

命题 7.2 (M. Micallef, J. D. Moore [60]) 设 $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量. 那么下面的说法是等价的:

(i) R 具有非负的迷向曲率.

(ii) 对所有向量 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$, 如果 $g(\zeta, \zeta) = g(\zeta, \eta) = g(\eta, \eta) = 0$, 那么 $R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) \geqslant 0$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 假设 R 具有非负的迷向曲率. 设向量 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ 是线性无关的, 满足 $g(\zeta, \zeta) = g(\zeta, \eta) = g(\eta, \eta) = 0$, 令 $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ 表示由 ζ, η 所张成的二维平面. 由推论 B.5 知, 存在单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$, 使得 $e_1 + ie_2 \in \sigma$, $e_3 + ie_4 \in \sigma$. 为简单起见, 记 $z = e_1 + ie_2$, $w = e_3 + ie_4$. 因为 $z, w \in \sigma$, 所以存在复数 a, b, c, d 使得 $\zeta = az + bw$, $\eta = cz + dw$. 这意

味着

$$R(\zeta,\eta,\overline{\zeta},\overline{\eta}) = |ad-bc|^2 R(z,w,\overline{z},\overline{w}).$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned} R(z,w,\overline{z},\overline{w}) = & R(e_1,e_3,e_1,e_3)+R(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ & +R(e_2,e_3,e_2,e_3)+R(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ & -2R(e_1,e_2,e_3,e_4) \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以, 我们有 $R(\zeta,\eta,\overline{\zeta},\overline{\eta}) \geqslant 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 我们现在假设 (ii) 成立. 断言: R 具有非负的迷向曲率. 事实上, 设 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 是 V 中单位正交的 4-标架. 定义 $\zeta = e_1+ie_2$, $\eta = e_3+ie_4$. 则 $g(\zeta,\zeta)=g(\zeta,\eta)=g(\eta,\eta)=0$. 所以, 由第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R(\zeta,\eta,\overline{\zeta},\overline{\eta}) = & R(e_1,e_3,e_1,e_3)+R(e_1,e_4,e_1,e_4) \\ & +R(e_2,e_3,e_2,e_3)+R(e_2,e_4,e_2,e_4) \\ & -2R(e_1,e_2,e_3,e_4). \end{aligned}$$

从而, 我们可得 R 具有非负的迷向曲率. □

下面我们将证明非负迷向曲率蕴涵非负的数量曲率 (见 [61], 命题 2.5).

命题 7.3 (M. Micallef, M. Wang [61]) *假设 V 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的赋予内积的向量空间, R 是 V 上的一个代数曲率张量, 具有非负的迷向曲率. 那么, R 具有非负的数量曲率. 并且, 如果 R 的 Ricci 张量为 0, 那么 $R=0$.*

证明 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组单位正交基. 因为 R 具有非负的迷向曲率, 所以

$$\begin{aligned} & R(e_i,e_k,e_i,e_k)+R(e_i,e_l,e_i,e_l) \\ & +R(e_j,e_k,e_j,e_k)+R(e_j,e_l,e_j,e_l) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{45}$$

其中 $i, j, k, l \in \{1, \cdots, n\}$ 互不相同. 对 $l \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i, j, k\}$ 求和得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}(e_i, e_i) + \mathrm{Ric}(e_j, e_j) - 2R(e_i, e_j, e_i, e_j)\\&+(n-4)(R(e_i, e_k, e_i, e_k) + R(e_j, e_k, e_j, e_k)) \geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $i, j, k \in \{1, \cdots, n\}$ 互不相同. 接下来, 对 $k \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i, j\}$ 求和得

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_i) + \mathrm{Ric}(e_j, e_j) - 2R(e_i, e_j, e_i, e_j) \geqslant 0, \tag{46}$$

其中 $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ 互不相同. 对 $j \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$ 求和得

$$(n-4)\,\mathrm{Ric}(e_i, e_i) + \mathrm{scal} \geqslant 0,$$

其中 $i \in \{1, \cdots, n\}$. 这意味着 scal $\geqslant 0$. 所以第一个结论成立.

为证明第二个结论, 我们假设 Ric $= 0$. 利用 (46), 我们可得 R 具有非正的截面曲率. 由此可得 $R = 0$. □

断言: 非负的迷向曲率在 Hamilton ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是保持的. 这个结论由 S. Brendle 和 R. Schoen [20] 以及 H. Nguyen [64] 独立证明 (或见 [51], 文章中讨论 $n = 4$ 的情形). 证明依赖于下述代数结果:

命题 7.4 设 R 是 V 上的一个代数曲率张量, 具有非负的迷向曲率. 假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 V 中单位正交的 4-标架, 满足

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&R^\sharp(e_1, e_3, e_1, e_3) + R^\sharp(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R^\sharp(e_2, e_3, e_2, e_3) + R^\sharp(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&+2R^\sharp(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2R^\sharp(e_1, e_4, e_2, e_3) \geqslant 0.\end{aligned}$$

命题 7.4 的证明要经过非常仔细的计算, 我们将在第 7.3 节中给出.

命题 7.5 设 R 是 V 上的一个代数曲率张量, 具有非负的迷向曲率. 假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 V 中单位正交的 4-标架, 满足

$$
\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0.
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

证明 由命题 7.4 知

$$
\begin{aligned}
&R^\sharp(e_1, e_3, e_1, e_3) + R^\sharp(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R^\sharp(e_2, e_3, e_2, e_3) + R^\sharp(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&+2R^\sharp(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2R^\sharp(e_1, e_4, e_2, e_3) \geqslant 0. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

并且, 由 R^2 的定义, 我们有

$$
\begin{aligned}
&R^2(e_1, e_3, e_1, e_3) + R^2(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R^2(e_2, e_3, e_2, e_3) + R^2(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&+2R^2(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2R^2(e_1, e_4, e_2, e_3) \\
=& \sum_{p,q=1}^{n} (R(e_1, e_3, e_p, e_q) - R(e_2, e_4, e_p, e_q))^2 \qquad (48) \\
&+ \sum_{p,q=1}^{n} (R(e_1, e_4, e_p, e_q) + R(e_2, e_3, e_p, e_q))^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

由 (47) 和 (48) 得到

$$
\begin{aligned}
&Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&+2Q(R)(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2Q(R)(e_1, e_4, e_2, e_3) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

因为 $Q(R)$ 满足第一 Bianchi 恒等式, 所以结论自然成立. □

命题 7.6 锥

$$C = \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R \text{ 具有非负的迷向曲率}\}$$

在 Hamilton ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 令 $I \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 表示标准球面的曲率张量, 即 $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. 由命题 7.5 知, 对每个 $\varepsilon > 0$, C 在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R) + \varepsilon I$ 下是不变的. 令 $\varepsilon \to 0$, 可得结论成立. □

结合命题 7.6 和定理 5.10, 我们可得下面的结论:

定理 7.7 (S. Brendle, R. Schoen [20]; H. Nguyen [64]) 假设 M 是一个紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上的 Ricci 流的解. 如果 $(M, g(0))$ 具有非负的迷向曲率, 那么对所有 $t \in [0, T)$, $(M, g(t))$ 将一直具有非负的迷向曲率.

7.3 命题 7.4 的证明

在这一节中, 我们将给出命题 7.4 的证明. 在整个这一节中, 我们始终假设 V 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的赋予内积的向量空间. R 是 V 上的一个代数曲率张量, 具有非负的迷向曲率. 我们还假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是单位正交的 4-标架, 满足

$$R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} = 0.$$

自然地, 我们可以将 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 延拓成 V 的一组单位正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$.

引理 7.8 我们有

$$R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442} = R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423} = 0.$$

证明 考虑标架 $\{e_1, \cos(s)e_2 - \sin(s)e_3, \sin(s)e_2 + \cos(s)e_3, e_4\}$. 因为 R 具有非负的迷向曲率, 所以函数

$$s \mapsto \cos^2(s)(R_{1313} + R_{2424} - 2R_{1234}) + \sin^2(s)(R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1324}) \\ +R_{1414} + R_{2323} + 2\cos(s)\sin(s)(R_{1213} - R_{2434} - R_{1224} + R_{1334})$$

对所有 $s \in R$ 是非负的, 并且当 $s = 0$ 时取值为 0. 从而, 我们可得 $R_{1213} - R_{2434} - R_{1224} + R_{1334} = 0$. 如果我们用 $\{e_2, -e_1, e_3, e_4\}$ 替换 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 那么可得 $-R_{2123} + R_{1434} - R_{2114} + R_{2334} = 0$. □

引理 7.9 我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq} \\ &= \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\ &\quad + \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}). \end{aligned}$$

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} &\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq} \\ &- \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\ &- \sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) \\ &= (R_{1212} + R_{3434})(R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234}) \\ &\quad +2R_{1234}(R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} + 2R_{1342} + 2R_{1423}) \\ &\quad -(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442})^2 - (R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423})^2 \\ &= (R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1234})(R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234}) \\ &\quad -(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442})^2 - (R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423})^2. \end{aligned}$$

由引理 7.8 知, 上式右端为 0. □

引理 7.10　对 $q = 5, \cdots, n$, 我们有

$$R_{133q} + R_{144q} + R_{432q} = R_{233q} + R_{244q} + R_{341q} = 0.$$

证明　考虑标架 $\{\cos(s)e_1 + \sin(s)e_q, e_2, e_3, e_4\}$. 因为 R 具有非负的迷向曲率, 所以函数

$$\begin{aligned} s \mapsto\ & \cos^2(s)(R_{1313} + R_{1414}) + \sin^2(s)(R_{q3q3} + R_{q4q4}) + R_{2323} + R_{2424} \\ & +2\cos(s)\sin(s)(R_{13q3} + R_{14q4}) - 2\cos(s)R_{1234} - 2\sin(s)R_{q234} \end{aligned}$$

对所有 $s \in \mathbb{R}$ 是非负的, 并且当 $s = 0$ 时取值为 0. 从而, 我们可得 $R_{13q3} + R_{14q4} - R_{q234} = 0$. 如果我们用 $\{e_2, -e_1, e_3, e_4\}$ 替换 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 那么可得 $R_{23q3} + R_{24q4} + R_{q134} = 0$. □

引理 7.11　对 $q = 5, \cdots, n$, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{4}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p=1}^{4} R_{12pq}R_{34pq} \\ = & \sum_{p=1}^{4}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\ & + \sum_{p=1}^{4}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}). \end{aligned}$$

证明　由引理 7.10 知

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{2}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p=1}^{2} R_{12pq}R_{34pq} \\ = & R_{212q}(R_{313q} + R_{414q}) + R_{121q}(R_{323q} + R_{424q}) \\ & -R_{121q}R_{341q} - R_{122q}R_{342q} \\ = & R_{212q}(R_{313q} + R_{414q} + R_{342q}) \\ & +R_{121q}(R_{323q} + R_{424q} - R_{341q}) \\ = & 0 \end{aligned}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=3}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\
&\quad+\sum_{p=3}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})\\
&=(R_{133q}+R_{234q})R_{432q}+(R_{143q}+R_{244q})R_{341q}\\
&\quad+(R_{134q}-R_{233q})R_{431q}-(R_{144q}-R_{243q})R_{342q}\\
&=(R_{133q}+R_{234q}+R_{144q}-R_{243q})R_{432q}\\
&\quad+(R_{143q}+R_{244q}-R_{134q}+R_{233q})R_{341q}\\
&=(R_{133q}+R_{144q}+R_{432q})R_{432q}\\
&\quad+(R_{341q}+R_{244q}+R_{233q})R_{341q}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

用 $\{e_3,e_4,e_1,e_2\}$ 替换 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, 可得

$$
\sum_{p=3}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p=3}^{4}R_{12pq}R_{34pq}=0
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{2}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\
&\quad+\sum_{p=1}^{2}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})=0.
\end{aligned}
$$

联立所有的式子, 可得结论成立. □

注意到单位正交 4-标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 实现了 R 的迷向曲率的最小值. 到现在为止, 我们用到了迷向曲率的一阶变分为 0 这一事实. 下面, 我们将用到迷向曲率的二阶变分非负这个事实.

引理 7.12 假设 $w_1,w_2,w_3,w_4\in\operatorname{span}\{e_5,\cdots,e_n\}$, 则

$$
R(w_1,e_3,w_1,e_3)+R(w_1,e_4,w_1,e_4)
$$

$$
\begin{aligned}
&+R(w_2,e_3,w_2,e_3)+R(w_2,e_4,w_2,e_4)\\
&+R(e_1,w_3,e_1,w_3)+R(e_2,w_3,e_2,w_3)\\
&+R(e_1,w_4,e_1,w_4)+R(e_2,w_4,e_2,w_4)\\
&-2[R(e_3,w_1,e_1,w_3)+R(e_4,w_1,e_2,w_3)]\\
&-2[R(e_4,w_1,e_1,w_4)-R(e_3,w_1,e_2,w_4)]\\
&+2[R(e_4,w_2,e_1,w_3)-R(e_3,w_2,e_2,w_3)]\\
&-2[R(e_3,w_2,e_1,w_4)+R(e_4,w_2,e_2,w_4)]\\
&-2R(w_1,w_2,e_3,e_4)-2R(e_1,e_2,w_3,w_4)
\end{aligned}
$$

是非负的.

证明　对每个 $i\in\{1,2,3,4\}$, 记 $v_i(s)$ 是下述以 $v_i(0)=e_i$ 为初值的线性 ODE 的解:

$$v_i'(s)=\sum_{j=1}^{4}(\langle v_i(s),e_j\rangle w_j-\langle v_i(s),w_j\rangle e_j).$$

显然, $v_i'(0)=w_i$, 并且

$$v_i''(0)=-\sum_{j=1}^{4}\langle w_i,w_j\rangle e_j.$$

对任意 $s\in\mathbb{R}$, 向量组 $\{v_1(s),v_2(s),v_3(s),v_4(s)\}$ 是 V 中一组单位正交的 4-标架. 因为 R 具有非负的迷向曲率, 所以函数

$$
\begin{aligned}
s\mapsto\ &R(v_1(s),v_3(s),v_1(s),v_3(s))+R(v_1(s),v_4(s),v_1(s),v_4(s))\\
&+R(v_2(s),v_3(s),v_2(s),v_3(s))+R(v_2(s),v_4(s),v_2(s),v_4(s))\\
&-2R(v_1(s),v_2(s),v_3(s),v_4(s))
\end{aligned}
$$

对所有 $s\in\mathbb{R}$ 是非负的, 并且当 $s=0$ 时取值为 0. 所以, 当 $s=0$ 时函数的二阶导数是非负的. 这意味着

$$0\leqslant J^{(1)}+J^{(2)}+J^{(3)}+J^{(4)}-J^{(5)},$$

其中

$$
\begin{aligned}
J^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}R(v_1(s), v_3(s), v_1(s), v_3(s))\bigg|_{s=0} \\
&= R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(e_1, w_3, e_1, w_3) \\
&\quad +2R(e_1, e_3, w_1, w_3) + 2R(e_1, w_3, w_1, e_3) \\
&\quad -(|w_1|^2 + |w_3|^2)R(e_1, e_3, e_1, e_3) \\
&\quad -\langle w_1, w_2\rangle R(e_1, e_3, e_2, e_3) - \langle w_1, w_4\rangle R(e_1, e_3, e_4, e_3) \\
&\quad -\langle w_3, w_2\rangle R(e_1, e_3, e_1, e_2) - \langle w_3, w_4\rangle R(e_1, e_3, e_1, e_4),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^{(2)} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}R(v_1(s), v_4(s), v_1(s), v_4(s))\bigg|_{s=0} \\
&= R(w_1, e_4, w_1, e_4) + R(e_1, w_4, e_1, w_4) \\
&\quad +2R(e_1, e_4, w_1, w_4) + 2R(e_1, w_4, w_1, e_4) \\
&\quad -(|w_1|^2 + |w_4|^2)R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&\quad -\langle w_1, w_2\rangle R(e_1, e_4, e_2, e_4) - \langle w_1, w_3\rangle R(e_1, e_4, e_3, e_4) \\
&\quad -\langle w_4, w_2\rangle R(e_1, e_4, e_1, e_2) - \langle w_4, w_3\rangle R(e_1, e_4, e_1, e_3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^{(3)} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}R(v_2(s), v_3(s), v_2(s), v_3(s))\bigg|_{s=0} \\
&= R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\
&\quad +2R(e_2, e_3, w_2, w_3) + 2R(e_2, w_3, w_2, e_3) \\
&\quad -(|w_2|^2 + |w_3|^2)R(e_2, e_3, e_2, e_3) \\
&\quad -\langle w_2, w_1\rangle R(e_2, e_3, e_1, e_3) - \langle w_2, w_4\rangle R(e_2, e_3, e_4, e_3) \\
&\quad -\langle w_3, w_1\rangle R(e_2, e_3, e_2, e_1) - \langle w_3, w_4\rangle R(e_2, e_3, e_2, e_4),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^{(4)} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}R(v_2(s), v_4(s), v_2(s), v_4(s))\bigg|_{s=0} \\
&= R(w_2, e_4, w_2, e_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\
&\quad +2R(e_2, e_4, w_2, w_4) + 2R(e_2, w_4, w_2, e_4) \\
&\quad -(|w_2|^2 + |w_4|^2)R(e_2, e_4, e_2, e_4)
\end{aligned}
$$

$$-\langle w_2, w_1\rangle R(e_2, e_4, e_1, e_4) - \langle w_2, w_3\rangle R(e_2, e_4, e_3, e_4)$$
$$-\langle w_4, w_1\rangle R(e_2, e_4, e_2, e_1) - \langle w_4, w_3\rangle R(e_2, e_4, e_2, e_3),$$

$$\begin{aligned} J^{(5)} &= \frac{d^2}{ds^2} R(v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s))\Big|_{s=0} \\ &= 2R(w_1, w_2, e_3, e_4) + 2R(w_1, e_2, w_3, e_4) + 2R(w_1, e_2, e_3, w_4) \\ &\quad +2R(e_1, w_2, w_3, e_4) + 2R(e_1, w_2, e_3, w_4) + 2R(e_1, e_2, w_3, w_4) \\ &\quad -(|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 + |w_4|^2) R(e_1, e_2, e_3, e_4) \\ &\quad -\langle w_1, w_3\rangle R(e_3, e_2, e_3, e_4) - \langle w_1, w_4\rangle R(e_4, e_2, e_3, e_4) \\ &\quad -\langle w_2, w_3\rangle R(e_1, e_3, e_3, e_4) - \langle w_2, w_4\rangle R(e_1, e_4, e_3, e_4) \\ &\quad -\langle w_3, w_1\rangle R(e_1, e_2, e_1, e_4) - \langle w_3, w_2\rangle R(e_1, e_2, e_2, e_4) \\ &\quad -\langle w_4, w_1\rangle R(e_1, e_2, e_3, e_1) - \langle w_4, w_2\rangle R(e_1, e_2, e_3, e_2). \end{aligned}$$

重新排列这些项, 可得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant\ & R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4) \\ & +R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(w_2, e_4, w_2, e_4) \\ & +R(e_1, w_3, e_1, w_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3) \\ & +R(e_1, w_4, e_1, w_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4) \\ & +2R(e_1, e_3, w_1, w_3) + 2R(e_1, w_3, w_1, e_3) - 2R(w_1, e_2, w_3, e_4) \\ & +2R(e_1, e_4, w_1, w_4) + 2R(e_1, w_4, w_1, e_4) - 2R(w_1, e_2, e_3, w_4) \\ & +2R(e_2, e_3, w_2, w_3) + 2R(e_2, w_3, w_2, e_3) - 2R(e_1, w_2, w_3, e_4) \\ & +2R(e_2, e_4, w_2, w_4) + 2R(e_2, w_4, w_2, e_4) - 2R(e_1, w_2, e_3, w_4) \\ & -2R(w_1, w_2, e_3, e_4) - 2R(e_1, e_2, w_3, w_4) \\ & -|w_1|^2(R_{1313} + R_{1414} - R_{1234}) - |w_2|^2(R_{2323} + R_{2424} - R_{1234}) \\ & -|w_3|^2(R_{1313} + R_{2323} - R_{1234}) - |w_4|^2(R_{1414} + R_{2424} - R_{1234}) \\ & +(\langle w_1, w_3\rangle - \langle w_2, w_4\rangle)(R_{1214} - R_{1232} + R_{3234} - R_{1434}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\langle w_1, w_4\rangle + \langle w_2, w_3\rangle)(R_{1213} + R_{1242} + R_{3134} + R_{2434})\\
&-2\langle w_1, w_2\rangle(R_{1323} + R_{1424}) - 2\langle w_3, w_4\rangle(R_{1314} + R_{2324}).
\end{aligned}
$$

我们用 $\{e_2, -e_1, e_4, -e_3\}$ 替换 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 可得

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant\ & R(w_1, e_4, w_1, e_4) + R(w_1, e_3, w_1, e_3)\\
&+R(w_2, e_4, w_2, e_4) + R(w_2, e_3, w_2, e_3)\\
&+R(e_2, w_3, e_2, w_3) + R(e_1, w_3, e_1, w_3)\\
&+R(e_2, w_4, e_2, w_4) + R(e_1, w_4, e_1, w_4)\\
&+2R(e_2, e_4, w_1, w_3) + 2R(e_2, w_3, w_1, e_4) - 2R(w_1, e_1, w_3, e_3)\\
&-2R(e_2, e_3, w_1, w_4) - 2R(e_2, w_4, w_1, e_3) + 2R(w_1, e_1, e_4, w_4)\\
&-2R(e_1, e_4, w_2, w_3) - 2R(e_1, w_3, w_2, e_4) + 2R(e_2, w_2, w_3, e_3)\\
&+2R(e_1, e_3, w_2, w_4) + 2R(e_1, w_4, w_2, e_3) - 2R(e_2, w_2, e_4, w_4)\\
&+2R(w_1, w_2, e_4, e_3) + 2R(e_2, e_1, w_3, w_4)\\
&-|w_1|^2(R_{2424} + R_{2323} - R_{2143}) - |w_2|^2(R_{1414} + R_{1313} - R_{2143})\\
&-|w_3|^2(R_{2424} + R_{1414} - R_{2143}) - |w_4|^2(R_{2323} + R_{1313} - R_{2143})\\
&+(\langle w_1, w_3\rangle - \langle w_2, w_4\rangle)(R_{2123} - R_{2141} + R_{4143} - R_{2343})\\
&+(\langle w_1, w_4\rangle + \langle w_2, w_3\rangle)(R_{2124} + R_{2131} + R_{4243} + R_{1343})\\
&+2\langle w_1, w_2\rangle(R_{2414} + R_{2313}) + 2\langle w_3, w_4\rangle(R_{2423} + R_{1413}).
\end{aligned}
$$

接下来, 我们对这两个不等式取算术平均. 利用等式 $R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424} - 2R_{1234} = 0$, 可得

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant\ & R(w_1, e_3, w_1, e_3) + R(w_1, e_4, w_1, e_4)\\
&+R(w_2, e_3, w_2, e_3) + R(w_2, e_4, w_2, e_4)\\
&+R(e_1, w_3, e_1, w_3) + R(e_2, w_3, e_2, w_3)\\
&+R(e_1, w_4, e_1, w_4) + R(e_2, w_4, e_2, w_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+[R(e_1,e_3,w_1,w_3)+R(e_1,w_3,w_1,e_3)-R(w_1,e_2,w_3,e_4)\\
&+R(e_2,e_4,w_1,w_3)+R(e_2,w_3,w_1,e_4)-R(w_1,e_1,w_3,e_3)]\\
&+[R(e_1,e_4,w_1,w_4)+R(e_1,w_4,w_1,e_4)-R(w_1,e_2,e_3,w_4)\\
&-R(e_2,e_3,w_1,w_4)-R(e_2,w_4,w_1,e_3)+R(w_1,e_1,e_4,w_4)]\\
&+[R(e_2,e_3,w_2,w_3)+R(e_2,w_3,w_2,e_3)-R(e_1,w_2,w_3,e_4)\\
&-R(e_1,e_4,w_2,w_3)-R(e_1,w_3,w_2,e_4)+R(e_2,w_2,w_3,e_3)]\\
&+[R(e_2,e_4,w_2,w_4)+R(e_2,w_4,w_2,e_4)-R(e_1,w_2,e_3,w_4)\\
&+R(e_1,e_3,w_2,w_4)+R(e_1,w_4,w_2,e_3)-R(e_2,w_2,e_4,w_4)]\\
&-2R(w_1,w_2,e_3,e_4)-2R(e_1,e_2,w_3,w_4).
\end{aligned}
$$

然后利用第一 Bianchi 恒等式可得结论成立. □

引理 7.13 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=5}^{n}R_{12pq}R_{34pq}\\
\geqslant&\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\
&+\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q}).
\end{aligned}
$$

证明 为方便起见, 我们记 $W=\operatorname{span}\{e_5,\cdots,e_n\}$. 定义线性变换 $A,B,C,D,E,F:W\to W$ 为

$$
\begin{aligned}
\langle Ae_p,e_q\rangle&=R_{1p1q}+R_{2p2q}, &\langle Be_p,e_q\rangle&=R_{3p3q}+R_{4p4q},\\
\langle Ce_p,e_q\rangle&=R_{3p1q}+R_{4p2q}, &\langle De_p,e_q\rangle&=R_{4p1q}-R_{3p2q},\\
\langle Ee_p,e_q\rangle&=R_{12pq}, &\langle Fe_p,e_q\rangle&=R_{34pq},
\end{aligned}
$$

其中 $p,q\in\{5,\cdots,n\}$. 注意到 A , B 是对称的, 而 E,F 是反对称的. 利用

引理 7.12 知, 对所有向量 $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W$, 有

$$\begin{aligned}
&\langle Bw_1, w_1\rangle + \langle Bw_2, w_2\rangle + \langle Aw_3, w_3\rangle + \langle Aw_4, w_4\rangle \\
&-2\langle Cw_1, w_3\rangle - 2\langle Dw_1, w_4\rangle + 2\langle Dw_2, w_3\rangle - 2\langle Cw_2, w_4\rangle \\
&-2\langle Fw_1, w_2\rangle - 2\langle Ew_3, w_4\rangle \geqslant 0. \qquad (49)
\end{aligned}$$

定义

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} B & F & -C^* & -D^* \\ -F & B & D^* & -C^* \\ -C & D & A & E \\ -D & -C & -E & A \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{id} \\ -\mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们可以将 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{U}$ 看成从向量空间 $W \times W \times W \times W$ 到自身的线性变换. 由 (49) 知 $\mathbb{M}$ 是正定的. 这意味着

$$0 \leqslant \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathbb{M}\mathbb{U}\mathbb{M}\mathbb{U}^*) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(EF) - \mathrm{tr}(C^2) - \mathrm{tr}(D^2).$$

所以, 我们可得

$$\begin{aligned}
0 \leqslant &\sum_{p,q=5}^{n} \langle Ae_p, e_q\rangle\langle Be_p, e_q\rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ee_p, e_q\rangle\langle Fe_p, e_q\rangle \\
&- \sum_{p,q=5}^{n} \langle Ce_p, e_q\rangle\langle Ce_q, e_p\rangle - \sum_{p,q=5}^{n} \langle De_p, e_q\rangle\langle De_q, e_p\rangle,
\end{aligned}$$

从而结论成立. □

下面我们给出命题 7.4 的完整证明. 由 $R^\sharp$ 的定义知

$$\begin{aligned}
&(R^\sharp)_{1313} + (R^\sharp)_{1414} + (R^\sharp)_{2323} + (R^\sharp)_{2424} \\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) \\
&\quad -2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{3p1q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{4p1q} \\
&\quad -2\sum_{p,q=1}^{n} R_{2p3q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{2p4q}R_{4p2q}
\end{aligned} \tag{50}$$

和

$$\begin{aligned}
&(R^\sharp)_{1342} + (R^\sharp)_{1423} \\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{4p2q} \\
&\quad +2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{4p3q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q}.
\end{aligned} \tag{51}$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 可得

$$\begin{aligned}
&2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{4p3q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{3p4q} \\
&= -2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p2q}R_{34pq} = -\sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq}.
\end{aligned}$$

因此, 等式 (51) 可写为

$$\begin{aligned}
&(R^\sharp)_{1342} + (R^\sharp)_{1423} \\
&= 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p4q}R_{3p2q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{1p3q}R_{4p2q} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq}.
\end{aligned} \tag{52}$$

联立 (50) 和 (52) 得

$$\begin{aligned}&(R^\sharp)_{1313} + (R^\sharp)_{1414} + (R^\sharp)_{2323} + (R^\sharp)_{2424} + 2(R^\sharp)_{1342} + 2(R^\sharp)_{1423}\\ &= 2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - 2\sum_{p,q=1}^{n}R_{12pq}R_{34pq}\\ &\quad -2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q})\\ &\quad -2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).\end{aligned} \tag{53}$$

另一方面, 由引理 7.9, 7.11 和 7.13 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - \sum_{p,q=1}^{n}R_{12pq}R_{34pq}\\ &\geqslant \sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q})\\ &\quad + \sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}).\end{aligned}$$

结合所有的事实, 可得

$$(R^\sharp)_{1313} + (R^\sharp)_{1414} + (R^\sharp)_{2323} + (R^\sharp)_{2424} + 2(R^\sharp)_{1342} + 2(R^\sharp)_{1423} \geqslant 0,$$

结论得证.

7.4 锥 $\tilde{C}$

假设 V 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的赋予内积的向量空间. $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量. 定义代数曲率张量 $\tilde{R} \in \mathscr{C}_B(V \times \mathbb{R})$:

$$\tilde{R}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4), \tag{54}$$

其中向量 $\tilde{v}_j = (v_j, y_j) \in V \times \mathbb{R}$. 下面的命题给出了 $\tilde{R}$ 具有非负迷向曲率的一个充分必要条件.

命题 7.14 设 $R\in\mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量, $\tilde{R}\in\mathscr{C}_B(V\times\mathbb{R})$ 是由 (54) 所定义的代数曲率张量. 则下面的几个说法等价:

(i) $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率.

(ii) 对所有单位正交的 4-标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\subset V$ 和所有 $\lambda\in[0,1]$, 有

$$
\begin{aligned}
&R(e_1,e_3,e_1,e_3)+\lambda^2R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&+R(e_2,e_3,e_2,e_3)+\lambda^2R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\
&-2\lambda R(e_1,e_2,e_3,e_4)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(iii) 对所有向量 $\zeta,\eta\in V^{\mathbb{C}}$, 满足 $g(\zeta,\zeta)g(\eta,\eta)-g(\zeta,\eta)^2=0$, 有

$$
R(\zeta,\eta,\bar{\zeta},\bar{\eta})\geqslant 0.
$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) : 假设 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率. 设 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\subset V$ 是一组单位正交的 4-标架, $\lambda\in[0,1]$. 定义

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_1&=(e_1,0), &\tilde{e}_2&=(e_2,0),\\
\tilde{e}_3&=(e_3,0), &\tilde{e}_4&=(\lambda e_4,\sqrt{1-\lambda^2}).
\end{aligned}
$$

因为 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率, 所以

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_3,\tilde{e}_1,\tilde{e}_3)+\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4,\tilde{e}_1,\tilde{e}_4)\\
&+\tilde{R}(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3)+\tilde{R}(\tilde{e}_2,\tilde{e}_4,\tilde{e}_2,\tilde{e}_4)\\
&-2\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&R(e_1,e_3,e_1,e_3)+\lambda^2R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&+R(e_2,e_3,e_2,e_3)+\lambda^2R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\
&-2\lambda R(e_1,e_2,e_3,e_4)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : 我们假设 (ii) 成立. 假设向量 $\zeta,\eta\in V^{\mathbb{C}}$ 是线性无关的, 满足 $g(\zeta,\zeta)g(\eta,\eta)-g(\zeta,\eta)^2=0$, $\sigma\subset V^{\mathbb{C}}$ 是由 ζ,η 所张成的二维平面. 由推

论 B.4 知, 存在单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda \in [0, 1]$, 使得 $e_1 + ie_2 \in \sigma$, 并且 $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$. 为简单起见, 记 $z = e_1 + ie_2$, $w = e_3 + i\lambda e_4$. 因为 $z, w \in \sigma$, 所以存在复数 a, b, c, d, 使得 $\zeta = az + bw$, $\eta = cz + dw$. 这意味着

$$R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) = |ad - bc|^2 R(z, w, \overline{z}, \overline{w}).$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned} R(z, w, \overline{z}, \overline{w}) = & R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ & + R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ & - 2\lambda R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以, 我们有 $R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) \geqslant 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : 我们假设 (iii) 成立. 断言: $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率. 事实上, 设 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ 是 $V \times \mathbb{R}$ 中单位正交的 4-标架. 记 $\tilde{e}_j = (v_j, y_j)$, 其中 $v_j \in V$, $y_j \in \mathbb{R}$. 定义 $\zeta = v_1 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$, $\eta = v_3 + iv_4 \in V^{\mathbb{C}}$. 因为 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ 是单位正交的 4-标架, 所以对所有 $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, 有 $\langle v_k, v_l \rangle = \delta_{kl} - y_k y_l$. 这意味着

$$\begin{aligned} g(\zeta, \zeta) &= |v_1|^2 - |v_2|^2 + 2i\langle v_1, v_2 \rangle \\ &= -y_1^2 + y_2^2 - 2iy_1 y_2 \\ &= -(y_1 + iy_2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\eta, \eta) &= |v_3|^2 - |v_4|^2 + 2i\langle v_3, v_4 \rangle \\ &= -y_3^2 + y_4^2 - 2iy_3 y_4 \\ &= -(y_3 + iy_4)^2, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} g(\zeta, \eta) &= \langle v_1, v_3 \rangle - \langle v_2, v_4 \rangle + i\langle v_1, v_4 \rangle + i\langle v_2, v_3 \rangle \\ &= -y_1 y_3 + y_2 y_4 - iy_1 y_4 - iy_2 y_3 \\ &= -(y_1 + iy_2)(y_3 + iy_4). \end{aligned}$$

所以, 我们有

$$g(\zeta,\zeta)g(\eta,\eta)-g(\zeta,\eta)^2=0.$$

由第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned}0\leqslant R(\zeta,\eta,\overline{\zeta},\overline{\eta})=&R(v_1,v_3,v_1,v_3)+R(v_1,v_4,v_1,v_4)\\&+R(v_2,v_3,v_2,v_3)+R(v_2,v_4,v_2,v_4)\\&-2R(v_1,v_2,v_3,v_4).\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_3,\tilde{e}_1,\tilde{e}_3)+\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4,\tilde{e}_1,\tilde{e}_4)\\&+\tilde{R}(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3)+\tilde{R}(\tilde{e}_2,\tilde{e}_4,\tilde{e}_2,\tilde{e}_4)\\&-2\tilde{R}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4)\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而, 我们可得 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率. □

推论 7.15 如果 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率, 那么对单位正交的 3-标架 $\{e_1,e_2,e_3\}\subset V$, 有

$$R(e_1,e_3,e_1,e_3)+R(e_2,e_3,e_2,e_3)\geqslant 0.$$

特别地, R 的 Ricci 张量是非负的.

推论 7.16 如果 R 是 2-非负的曲率算子, 那么 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率.

证明 考虑单位正交的 4-标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\subset V$ 和实数 $\lambda\in[0,1]$. 定义

$$\varphi=e_1\wedge e_3+\lambda e_4\wedge e_2\in\wedge^2V,$$

$$\psi=\lambda e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3\in\wedge^2V.$$

注意到 $|\varphi|^2=|\psi|^2$, 并且 $\langle\varphi,\psi\rangle=0$. 因为 R 是 2-非负的曲率算子, 所以

$R(\varphi,\varphi)+R(\psi,\psi)\geqslant 0$. 这意味着

$$\begin{aligned}&R(e_1,e_3,e_1,e_3)+\lambda^2R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&+R(e_2,e_3,e_2,e_3)+\lambda^2R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&-2\lambda R(e_1,e_2,e_3,e_4)\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而, 由命题 7.14 可得 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率. □

记 $\tilde{C}\subset\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上使得 $\tilde{R}$ 具有非负迷向曲率的所有代数曲率张量构成的集合:

$$\tilde{C}=\{R\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n):\tilde{R}\text{ 具有非负的迷向曲率}\}.$$

注意到 $\tilde{C}$ 是闭凸锥, 在 $\mathrm{O}(n)$ 的作用下是不变的.

命题 7.17 锥 $\tilde{C}$ 在 Hamilton ODE $\dfrac{d}{dt}R=Q(R)$ 下是不变的.

证明 设 $R(t)\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是 ODE $\dfrac{d}{dt}R(t)=Q(R(t))$ 的解. 那么, 诱导的曲率张量 $\tilde{R}(t)\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ 满足 $\dfrac{d}{dt}\tilde{R}(t)=Q(\tilde{R}(t))$. 因此, 由命题 7.6 可得结论成立. □

7.5 锥 $\hat{C}$

假设 V 是一个维数 $n\geqslant 4$ 的赋予内积的向量空间. $R\in\mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量. 定义代数曲率张量 $\hat{R}\in\mathscr{C}_B(V\times\mathbb{R}^2)$:

$$\hat{R}(\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_4)=R(v_1,v_2,v_3,v_4),\tag{55}$$

其中向量 $\hat{v}_j=(v_j,y_j)\in V\times\mathbb{R}^2$. 下面的命题给出了 $\hat{R}$ 具有非负迷向曲率的一个充分必要条件.

命题 7.18 设 $R\in\mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量, $\hat{R}\in\mathscr{C}_B(V\times\mathbb{R}^2)$ 是由 (55) 所定义的代数曲率张量. 则下面的几个说法等价:

(i) $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率.

(ii) 对所有单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和所有 $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(iii) 对所有向量 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$, 有 $R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) \geqslant 0$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 假设 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率. 设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 是一组单位正交的 4-标架, $\lambda, \mu \in [0, 1]$. 定义

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= (e_1, (0, 0)), \qquad & \hat{e}_2 &= (\mu e_2, (0, \sqrt{1-\mu^2})), \\
\hat{e}_3 &= (e_3, (0, 0)), \qquad & \hat{e}_4 &= (\lambda e_4, (\sqrt{1-\lambda^2}, 0)).
\end{aligned}$$

显然 $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_2\}$ 是 $V \times \mathbb{R}^2$ 中单位正交的 4-标架. 因为 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率, 所以

$$\begin{aligned}
&\hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_3, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + \hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_4, \hat{e}_1, \hat{e}_4) \\
&+\hat{R}(\hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + \hat{R}(\hat{e}_2, \hat{e}_4, \hat{e}_2, \hat{e}_4) \\
&-2\hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 我们假设 (ii) 成立. 假设向量 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ 是线性无关的, $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ 是由 ζ, η 所张成的二维平面. 由推论 B.3 知, 存在单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 使得 $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$, 并且 $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$. 记 $z = e_1 + i\mu e_2$, $w = e_3 + i\lambda e_4$. 因为 $\zeta, \eta \in \sigma$, 所以存在复数

a, b, c, d 使得 $\zeta = az + bw$, $\eta = cz + dw$. 这意味着

$$R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) = |ad - bc|^2 R(z, w, \overline{z}, \overline{w}).$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned} R(z, w, \overline{z}, \overline{w}) = R(e_1, e_3, e_1, e_3) &+ \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ &+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ &-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以, 我们有 $R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) \geqslant 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 我们假设 (iii) 成立. 断言: $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率. 事实上, 设 $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ 是 $V \times \mathbb{R}^2$ 中单位正交的 4-标架. 记 $\hat{e}_j = (v_j, y_j)$, 其中 $v_j \in V$, $y_j \in \mathbb{R}^2$. 定义 $\zeta = v_1 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$, $\eta = v_3 + iv_4 \in V^{\mathbb{C}}$. 所以, 由第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) = &R(v_1, v_3, v_1, v_3) + R(v_1, v_4, v_1, v_4) \\ &+R(v_2, v_3, v_2, v_3) + R(v_2, v_4, v_2, v_4) \\ &-2R(v_1, v_2, v_3, v_4). \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_3, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + \hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_4, \hat{e}_1, \hat{e}_4) \\ &+\hat{R}(\hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + \hat{R}(\hat{e}_2, \hat{e}_4, \hat{e}_2, \hat{e}_4) \\ &-2\hat{R}(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4) \geqslant 0. \end{aligned}$$

从而, 我们可得 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率. □

推论 7.19 如果 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率, 那么 R 具有非负的截面曲率.

推论 7.20 如果 R 具有非负的曲率算子, 那么 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率.

证明 考虑单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0, 1]$. 定义

$$\varphi = e_1 \wedge e_3 + \lambda\mu e_4 \wedge e_2 \in \wedge^2 V,$$

$$\psi = \lambda e_1 \wedge e_4 + \mu e_2 \wedge e_3 \in \wedge^2 V.$$

因为 R 具有非负的曲率算子, 所以 $R(\varphi, \varphi) + R(\psi, \psi) \geqslant 0$. 这意味着

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

从而, 由命题 7.18 可得 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率. □

记 $\hat{C} \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上使得 $\hat{R}$ 具有非负迷向曲率的所有代数曲率张量构成的集合:

$$\hat{C} = \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : \hat{R} \text{ 具有非负的迷向曲率}\}.$$

注意到 $\hat{C}$ 是闭凸锥, 在 $\mathrm{O}(n)$ 的作用下是不变的.

命题 7.21 锥 $\hat{C}$ 在 Hamilton ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 设 $R(t) \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是 ODE $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ 的解. 那么, 诱导的曲率张量 $\hat{R}(t) \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2)$ 满足 $\frac{d}{dt}\hat{R}(t) = Q(\hat{R}(t))$. 因此, 由命题 7.6 可得结论成立. □

7.6 在 $\tilde{C}$ 和 $\hat{C}$ 之间不变的集合

在这一节中, 我们介绍另外一个集合 $G \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 它在 Hamilton ODE 下是不变的. 这个集合最先在 [17] 中进行研究. 在整个这一节中, 我们始终假设 V 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的赋予内积的向量空间. $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量. 定义代数曲率张量 $S \in \mathscr{C}_B(V \times \mathbb{R}^2)$:

$$S(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + \langle y_1, y_3\rangle\langle y_2, y_4\rangle - \langle y_1, y_4\rangle\langle y_2, y_3\rangle, \quad (56)$$

其中向量 $\hat{v}_j = (v_j, y_j) \in V \times \mathbb{R}^2$. 下面的命题给出了 S 具有非负迷向曲率的一个充分必要条件.

命题 7.22 设 $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量, $S \in \mathscr{C}_B(V \times \mathbb{R}^2)$ 是由 (56) 所定义的代数曲率张量. 则下面的几个说法等价:

(i) S 具有非负的迷向曲率.

(ii) 对所有单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和所有 $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(iii) 对所有向量 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$, 有 $R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) + |g(\zeta, \zeta)g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2| \geqslant 0$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii): 假设 S 具有非负的迷向曲率. 设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 是一组单位正交的 4-标架, $\lambda, \mu \in [0, 1]$. 定义

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= (e_1, (0, 0)), & \hat{e}_2 &= (\mu e_2, (0, \sqrt{1 - \mu^2})), \\
\hat{e}_3 &= (e_3, (0, 0)), & \hat{e}_4 &= (\lambda e_4, (\sqrt{1 - \lambda^2}, 0)).
\end{aligned}$$

显然 $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_2\}$ 是 $V \times \mathbb{R}^2$ 中单位正交的 4-标架. 因为 S 具有非负的迷向曲率, 所以

$$\begin{aligned}
&S(\hat{e}_1, \hat{e}_3, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + S(\hat{e}_1, \hat{e}_4, \hat{e}_1, \hat{e}_4) \\
&+S(\hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + S(\hat{e}_2, \hat{e}_4, \hat{e}_2, \hat{e}_4) \\
&-2S(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

利用 (56) 知

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 我们假设 (ii) 成立. 假设向量 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ 是线性无关的, $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$ 是由 ζ, η 所张成的二维平面. 由推论 B.3 知, 存在单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 使得 $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$, 并且 $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$. 为简单起见, 记 $z = e_1 + i\mu e_2$, $w = e_3 + i\lambda e_4$. 因为 $z, w \in \sigma$, 所以存在复数 a, b, c, d 使得 $\zeta = az + bw$, $\eta = cz + dw$. 这意味着

$$R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) = |ad - bc|^2 R(z, w, \overline{z}, \overline{w}),$$

并且

$$g(\zeta, \zeta)g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2 = (ad - bc)^2(g(z, z)g(w, w) - g(z, w)^2).$$

结合上述事实, 可得

$$\begin{aligned}
&R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) + |g(\zeta, \zeta)g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2| \\
=& |ad - bc|^2[R(z, w, \overline{z}, \overline{w}) + |g(z, z)g(w, w) - g(z, w)^2|].
\end{aligned}$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned}
&R(z, w, \overline{z}, \overline{w}) + |g(z, z)g(w, w) - g(z, w)^2| \\
=& R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) + (1 - \lambda^2)(1 - \mu^2) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

所以, 我们有 $R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) + |g(\zeta, \zeta)g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2| \geqslant 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 我们假设 (iii) 成立. 断言: S 具有非负的迷向曲率. 事实上, 设 $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ 是 $V \times \mathbb{R}^2$ 中单位正交的 4-标架. 记 $\hat{e}_j = (v_j, y_j)$, 其中 $v_j \in V$, $y_j \in \mathbb{R}^2$. 定义 $\zeta = v_1 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$, $\eta = v_3 + iv_4 \in V^{\mathbb{C}}$. 所以, 由第一 Bianchi 恒等式, 得到

$$\begin{aligned}
R(\zeta, \eta, \overline{\zeta}, \overline{\eta}) =& R(v_1, v_3, v_1, v_3) + R(v_1, v_4, v_1, v_4) \\
&+R(v_2, v_3, v_2, v_3) + R(v_2, v_4, v_2, v_4) \\
&-2R(v_1, v_2, v_3, v_4).
\end{aligned}$$

因为 $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4\}$ 是单位正交的 4-标架, 所以对所有 $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, 有 $\langle v_k, v_l \rangle = \delta_{kl} - \langle y_k, y_l \rangle$. 这意味着

$$\begin{aligned} g(\zeta, \zeta) &= |v_1|^2 - |v_2|^2 + 2i\langle v_1, v_2 \rangle \\ &= -|y_1|^2 + |y_2|^2 - 2i\langle y_1, y_2 \rangle \\ &= -g(y_1 + iy_2, y_1 + iy_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\eta, \eta) &= |v_3|^2 - |v_4|^2 + 2i\langle v_3, v_4 \rangle \\ &= -|y_3|^2 + |y_4|^2 - 2i\langle y_3, y_4 \rangle \\ &= -g(y_3 + iy_4, y_3 + iy_4), \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} g(\zeta, \eta) &= \langle v_1, v_3 \rangle - \langle v_2, v_4 \rangle + i\langle v_1, v_4 \rangle + i\langle v_2, v_3 \rangle \\ &= -\langle y_1, y_3 \rangle + \langle y_2, y_4 \rangle - i\langle y_1, y_4 \rangle - i\langle y_2, y_3 \rangle \\ &= -g(y_1 + iy_2, y_3 + iy_4). \end{aligned}$$

由命题 B.1 知

$$\begin{aligned} &|g(\zeta, \zeta)g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2| \\ = &|g(y_1 + iy_2, y_1 + iy_2)g(y_3 + iy_4, y_3 + iy_4) - g(y_1 + iy_2, y_3 + iy_4)^2| \\ \leqslant &g(y_1 + iy_2, y_1 - iy_2)g(y_3 + iy_4, y_3 - iy_4) - |g(y_1 + iy_2, y_3 - iy_4)|^2 \\ = &(|y_1|^2 + |y_2|^2)(|y_3|^2 + |y_4|^2) \\ &-(\langle y_1, y_3 \rangle + \langle y_2, y_4 \rangle)^2 - (\langle y_1, y_4 \rangle - \langle y_2, y_3 \rangle)^2. \end{aligned}$$

联立所有的式子可得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant R(\zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) + |g(\zeta, \zeta)g(\eta, \eta) - g(\zeta, \eta)^2| \\ &\leqslant R(v_1, v_3, v_1, v_3) + R(v_1, v_4, v_1, v_4) \\ &\quad + R(v_2, v_3, v_2, v_3) + R(v_2, v_4, v_2, v_4) \\ &\quad - 2R(v_1, v_2, v_3, v_4) + (|y_1|^2 + |y_2|^2)(|y_3|^2 + |y_4|^2) \\ &\quad - (\langle y_1, y_3 \rangle + \langle y_2, y_4 \rangle)^2 - (\langle y_1, y_4 \rangle - \langle y_2, y_3 \rangle)^2. \end{aligned}$$

利用 (56) 得

$$
\begin{aligned}
&S(\hat{e}_1,\hat{e}_3,\hat{e}_1,\hat{e}_3)+S(\hat{e}_1,\hat{e}_4,\hat{e}_1,\hat{e}_4)\\
&+S(\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_2,\hat{e}_3)+S(\hat{e}_2,\hat{e}_4,\hat{e}_2,\hat{e}_4)\\
&-2S(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_4)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

从而, 我们可得 S 具有非负的迷向曲率. □

记 $G\subset\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上使得 S 具有非负迷向曲率的所有代数曲率张量构成的集合:

$$
G=\{R\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n): S \text{ 具有非负的迷向曲率}\}.
$$

注意到 G 是闭凸锥, 在 $\mathrm{O}(n)$ 的作用下是不变的.

下面我们描述集合 G 与我们在第 7.4 节和第 7.5 节所提到的锥 $\tilde{C}$ 和 $\hat{C}$ 之间的关系. 为简单起见, 记 $I\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是标准球面的曲率张量, 即 $I_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$.

命题 7.23 我们有 $\hat{C}\subset G\subset\tilde{C}$.

证明 由命题 7.14, 7.18 和 7.22 易得结论成立. □

命题 7.24 我们有 $G\subset\{R\in\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n): R+I\in\hat{C}\}$.

证明 由命题 7.18 和 7.22 易得结论成立. □

在 [17] 中证明了, 集合 G 在 Hamilton ODE $\dfrac{d}{dt}R=Q(R)$ 下是不变的. 在这一节剩下的部分, 我们将给出这个结果的证明 (见 [17], 第 3 节). 我们首先给出一个引理.

引理 7.25 设 $R\in\mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量, $S\in\mathscr{C}_B(V\times\mathbb{R}^2)$ 是由 (56) 所定义的代数曲率张量. 则对所有向量 $\hat{v}_j=(v_j,y_j)\in V\times\mathbb{R}^2$, 有

$$
S^\sharp(\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_4)=R^\sharp(v_1,v_2,v_3,v_4).
$$

证明 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组单位正交基. 假设 $\{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_{n+2}\}$ 是 $V \times \mathbb{R}^2$ 的一组单位正交基, 使得对 $k = 1, \cdots, n$, 有 $\hat{e}_k = (e_k, (0, 0))$. 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p,q=1}^{n+2} S(\hat{v}_1, \hat{e}_p, \hat{v}_3, \hat{e}_q) S(\hat{v}_2, \hat{e}_p, \hat{v}_4, \hat{e}_q) \\
=&\sum_{p,q=1}^{n} S(\hat{v}_1, \hat{e}_p, \hat{v}_3, \hat{e}_q) S(\hat{v}_2, \hat{e}_p, \hat{v}_4, \hat{e}_q) \\
&+ \sum_{p,q=n+1}^{n+2} S(\hat{v}_1, \hat{e}_p, \hat{v}_3, \hat{e}_q) S(\hat{v}_2, \hat{e}_p, \hat{v}_4, \hat{e}_q) \\
=&\sum_{p,q=1}^{n} R(v_1, e_p, v_3, e_q) R(v_2, e_p, v_4, e_q) + \langle y_1, y_2 \rangle \langle y_3, y_4 \rangle. \qquad (57)
\end{aligned}
$$

如果我们调换 $\hat{v}_3$ 和 $\hat{v}_4$ 的位置, 那么可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p,q=1}^{n+2} S(\hat{v}_1, \hat{e}_p, \hat{v}_4, \hat{e}_q) S(\hat{v}_2, \hat{e}_p, \hat{v}_3, \hat{e}_q) \\
=&\sum_{p,q=1}^{n} S(\hat{v}_1, \hat{e}_p, \hat{v}_4, \hat{e}_q) S(\hat{v}_2, \hat{e}_p, \hat{v}_3, \hat{e}_q) \\
&+ \sum_{p,q=n+1}^{n+2} S(\hat{v}_1, \hat{e}_p, \hat{v}_4, \hat{e}_q) S(\hat{v}_2, \hat{e}_p, \hat{v}_3, \hat{e}_q) \\
=&\sum_{p,q=1}^{n} R(v_1, e_p, v_4, e_q) R(v_2, e_p, v_3, e_q) + \langle y_1, y_2 \rangle \langle y_4, y_3 \rangle. \qquad (58)
\end{aligned}
$$

用 (57) 减去 (58), 可得 $S^\sharp(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4) = R^\sharp(v_1, v_2, v_3, v_4)$. □

引理 7.26 设 $R \in \mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量, $S \in \mathscr{C}_B(V \times \mathbb{R}^2)$ 是由 (56) 所定义的代数曲率张量. 我们假设 S 具有非负的迷向曲率. 并且, 假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 V 中一个单位正交的 4-标架, 满足对实数 $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 有

$$
\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) + (1-\lambda^2)(1-\mu^2) = 0. \qquad (59)
\end{aligned}
$$

则

$$\begin{aligned}&R^\sharp(e_1,e_3,e_1,e_3)+\lambda^2R^\sharp(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&+\mu^2R^\sharp(e_2,e_3,e_2,e_3)+\lambda^2\mu^2R^\sharp(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&+2\lambda\mu R^\sharp(e_1,e_3,e_4,e_2)+2\lambda\mu R^\sharp(e_1,e_4,e_2,e_3)\geqslant 0.\end{aligned}$$

证明 定义 $V\times\mathbb{R}^2$ 上的单位正交的 4-标架 $\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_4\}$:

$$\begin{aligned}&\hat{e}_1=(e_1,(0,0)), &&\hat{e}_2=(\mu e_2,(0,\sqrt{1-\mu^2})),\\&\hat{e}_3=(e_3,(0,0)), &&\hat{e}_4=(\lambda e_4,(\sqrt{1-\lambda^2},0)).\end{aligned}$$

(59) 意味着

$$\begin{aligned}&S(\hat{e}_1,\hat{e}_3,\hat{e}_1,\hat{e}_3)+S(\hat{e}_1,\hat{e}_4,\hat{e}_1,\hat{e}_4)\\&+S(\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_2,\hat{e}_3)+S(\hat{e}_2,\hat{e}_4,\hat{e}_2,\hat{e}_4)\\&-2S(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_4)=0.\end{aligned}$$

所以, 由命题 7.4 知

$$\begin{aligned}&S^\sharp(\hat{e}_1,\hat{e}_3,\hat{e}_1,\hat{e}_3)+S^\sharp(\hat{e}_1,\hat{e}_4,\hat{e}_1,\hat{e}_4)\\&+S^\sharp(\hat{e}_2,\hat{e}_3,\hat{e}_2,\hat{e}_3)+S^\sharp(\hat{e}_2,\hat{e}_4,\hat{e}_2,\hat{e}_4)\\&+2S^\sharp(\hat{e}_1,\hat{e}_3,\hat{e}_4,\hat{e}_2)+2S^\sharp(\hat{e}_1,\hat{e}_4,\hat{e}_2,\hat{e}_3)\geqslant 0.\end{aligned}$$

利用引理 7.25 可得

$$\begin{aligned}&R^\sharp(e_1,e_3,e_1,e_3)+\lambda^2R^\sharp(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&+\mu^2R^\sharp(e_2,e_3,e_2,e_3)+\lambda^2\mu^2R^\sharp(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&+2\lambda\mu R^\sharp(e_1,e_3,e_4,e_2)+2\lambda\mu R^\sharp(e_1,e_4,e_2,e_3)\geqslant 0.\end{aligned}$$

证明完毕. □

命题 7.27 设 $R\in\mathscr{C}_B(V)$ 是 V 上的一个代数曲率张量, $S\in\mathscr{C}_B(V\times\mathbb{R}^2)$ 是由 (56) 所定义的代数曲率张量. 我们假设 S 具有非负的迷向曲

率. 并且, 假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 V 中一个单位正交的 4-标架, 满足对实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4) + (1-\lambda^2)(1-\mu^2) = 0.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
&Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+\mu^2 Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&-2\lambda\mu Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

证明 由命题 7.26 知

$$\begin{aligned}
&R^\sharp(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R^\sharp(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+\mu^2 R^\sharp(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R^\sharp(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&+2\lambda\mu R^\sharp(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2\lambda\mu R^\sharp(e_1, e_4, e_2, e_3) \geqslant 0. \qquad (60)
\end{aligned}$$

并且, 由 R^2 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
&R^2(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R^2(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+\mu^2 R^2(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R^2(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&+2\lambda\mu R^2(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2\lambda\mu R^2(e_1, e_4, e_2, e_3)\\
=&\sum_{p,q=1}^n (R(e_1, e_3, e_p, e_q) - \lambda\mu R(e_2, e_4, e_p, e_q))^2 \qquad (61)\\
&+\sum_{p,q=1}^n (\lambda R(e_1, e_4, e_p, e_q) + \mu R(e_2, e_3, e_p, e_q))^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

将 (60) 和 (61) 加起来, 可得

$$\begin{aligned}
&Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+\mu^2 Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&+2\lambda\mu Q(R)(e_1, e_3, e_4, e_2) + 2\lambda\mu Q(R)(e_1, e_4, e_2, e_3) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

因为 $Q(R)$ 满足第一 Bianchi 恒等式, 所以结论成立. □

命题 7.28 集合 G 在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 由命题 7.5 知, 对每个 $\varepsilon > 0$, 集合 G 在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R) + \varepsilon I$ 下是不变的. 令 $\varepsilon \to 0$, 可得结论成立. □

结合命题 7.28 和定理 5.10, 我们可得下面的结论:

命题 7.29 (S. Brendle [17]) 假设 M 是一个紧致的流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上 Ricci 流的解. 并且, 记 $S^2(1)$ 表示具有常曲率为 1 的标准度量的二维球面. 如果 $(M, g(0)) \times S^2(1)$ 具有非负的迷向曲率, 那么, 对所有 $t \in [0, T)$, $(M, g(t)) \times S^2(1)$ 都具有非负的迷向曲率.

证明 假设条件保证了对所有点 $p \in M$, $g(0)$ 的曲率张量落在集合 G 内. 由定理 5.10 知, 对所有点 $p \in M$ 和所有 $t \in [0, T)$, $g(t)$ 的曲率张量都落在集合 G 内. 从而, 对所有 $t \in [0, T)$, $(M, g(t)) \times S^2(1)$ 具有非负的迷向曲率. □

7.7 不同的曲率条件综述

在本章的最后部分, 我们给出一个图表来说明不同曲率条件之间的关系. 给定一个维数 $n \geqslant 4$ 的黎曼流形 (M, g), 我们考虑下面的一些曲率条件:

(C1) (M, g) 是逐点弱 1/4-夹的.

(C2) (M, g) 具有非负截面曲率.

(C3) (M, g) 具有非负 Ricci 曲率.

(C4) (M, g) 具有非负数量曲率.

(C5) $(M, g) \times \mathbb{R}^2$ 具有非负迷向曲率.

(C6) $(M, g) \times S^2(1)$ 具有非负迷向曲率.

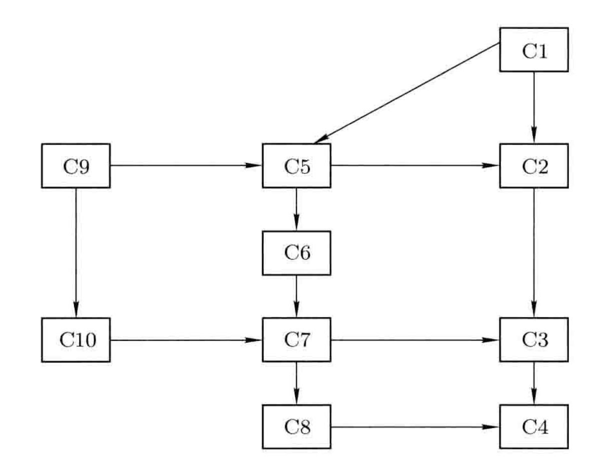
(C7) $(M, g) \times \mathbb{R}$ 具有非负迷向曲率.

(C8) (M, g) 具有非负迷向曲率.

(C9) (M,g) 具有非负曲率算子.

(C10) $(M,g)\times\mathbb{R}^2$ 具有 2-非负曲率算子.

曲率条件 (C4) — (C10) 在 Ricci 流下是保持的. 下面的图表将给出不同曲率条件 (C1) — (C10) 之间的关系. 大部分的蕴涵关系我们已经在前面介绍过了 (也可见命题 8.13).





第八章 高维情形下的收敛性结果

8.1 曲率张量满足的代数恒等式

在这一节中,我们将描述曲率张量满足的一些代数恒等式,这是由 C. Böhm 和 B. Wilking [14] 发现的. 我们首先回忆 Kulkarni-Nomizu 乘积的定义 (见 [13], 定义 1.110).

定义 8.1 假设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对称双线性型, 则 A 和 B 的 Kulkarni-Nomizu 乘积定义为

$$(A \owedge B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il} + A_{jl}B_{ik}.$$

直接计算可得 $A \owedge B \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$.

固定实数 $a, b \geqslant 0$. 定义线性变换 $\ell_{a,b} : \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\ell_{a,b}(R) = R + b\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{id} + \frac{1}{n}(a-b)\,\mathrm{scal}\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id}, \tag{62}$$

其中 Ric 和 scal 分别表示 R 的 Ricci 张量和数量曲率.

引理 8.2 对每个代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& Q(\ell_{a,b}(R))_{ijkl} - Q(R)_{ijkl} \\
= {} & 2b \sum_{p,q=1}^{n} \mathrm{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& +(4b + 2(n-2)b^2)(\mathrm{Ric}_{ik}\,\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\,\mathrm{Ric}_{jk}) \\
& -2b^2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il} - \mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right) \\
& \qquad \cdot \mathrm{scal}\,(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& +2b^2|\mathrm{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \\
& +\frac{8}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\,\mathrm{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

证明 为简单起见, 记 $S = \ell_{a,b}(R)$. 则

$$
\begin{aligned}
S_{ijkl} = {} & R_{ijkl} + b(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\frac{2}{n}(a-b)\,\mathrm{scal}\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
& (S^2)_{ijkl} - (R^2)_{ijkl} \\
= {} & 2b \sum_{p=1}^{n} (\mathrm{Ric}_{ip}R_{pjkl} + \mathrm{Ric}_{jp}R_{ipkl} + \mathrm{Ric}_{kp}R_{ijpl} + \mathrm{Ric}_{lp}R_{ijkp}) \qquad (63) \\
& +\frac{8}{n}(a-b)\,\mathrm{scal}\,R_{ijkl} + 4b^2(\mathrm{Ric}_{ik}\,\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\,\mathrm{Ric}_{jk}) \\
& +2b^2(\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il} - \mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\frac{8}{n}(a-b)b\,\mathrm{scal}\,(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\frac{8}{n^2}(a-b)^2\,\mathrm{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

并且, 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
& (S^\sharp)_{ijkl} - (R^\sharp)_{ijkl} \\
= {} & 2b \sum_{p=1}^{n} (\mathrm{Ric}_{ip}R_{jlkp} + \mathrm{Ric}_{jp}R_{iklp} + \mathrm{Ric}_{kp}R_{iplj} + \mathrm{Ric}_{lp}R_{jpki})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2b\sum_{p=1}^{n}(\operatorname{Ric}_{ip}R_{jklp}+\operatorname{Ric}_{jp}R_{ilkp}+\operatorname{Ric}_{kp}R_{jpli}+\operatorname{Ric}_{lp}R_{ipkj})\\
&+2b\sum_{p,q=1}^{n}\operatorname{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl}-R_{iplq}\delta_{jk}-R_{jpkq}\delta_{il}+R_{jplq}\delta_{ik})\\
&+\frac{8}{n}(a-b)\operatorname{scal}(R_{iklj}-R_{ilkj})\\
&+(4b+2(n-4)b^2)(\operatorname{Ric}_{ik}\operatorname{Ric}_{jl}-\operatorname{Ric}_{il}\operatorname{Ric}_{jk})\\
&-4b^2(\operatorname{Ric}^2_{ik}\delta_{jl}-\operatorname{Ric}^2_{jk}\delta_{il}-\operatorname{Ric}^2_{il}\delta_{jk}+\operatorname{Ric}^2_{jl}\delta_{ik})\\
&+\left(2b^2+\frac{4}{n}(a-b)(1+(n-4)b)\right)\\
&\qquad\cdot\operatorname{scal}(\operatorname{Ric}_{ik}\delta_{jl}-\operatorname{Ric}_{il}\delta_{jk}-\operatorname{Ric}_{jk}\delta_{il}+\operatorname{Ric}_{jl}\delta_{ik})\\
&+2b^2|\operatorname{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})\\
&+\frac{8}{n^2}(a-b)(2b+(n-2)a)\operatorname{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

利用第一 Bianchi 恒等式可得

$$
\begin{aligned}
&(S^\sharp)_{ijkl}-(R^\sharp)_{ijkl}\\
={}&-2b\sum_{p=1}^{n}(\operatorname{Ric}_{ip}R_{pjkl}+\operatorname{Ric}_{jp}R_{ipkl}+\operatorname{Ric}_{kp}R_{ijpl}+\operatorname{Ric}_{lp}R_{ijkp}) \qquad (64)\\
&+2b\sum_{p,q=1}^{n}\operatorname{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl}-R_{iplq}\delta_{jk}-R_{jpkq}\delta_{il}+R_{jplq}\delta_{ik})\\
&+\frac{8}{n}(a-b)\operatorname{scal}R_{ijkl}+(4b+2(n-4)b^2)(\operatorname{Ric}_{ik}\operatorname{Ric}_{jl}-\operatorname{Ric}_{il}\operatorname{Ric}_{jk})\\
&-4b^2(\operatorname{Ric}^2_{ik}\delta_{jl}-\operatorname{Ric}^2_{il}\delta_{jk}-\operatorname{Ric}^2_{jk}\delta_{il}+\operatorname{Ric}^2_{jl}\delta_{ik})\\
&+\left(2b^2+\frac{4}{n}(a-b)(1+(n-4)b)\right)\\
&\qquad\cdot\operatorname{scal}(\operatorname{Ric}_{ik}\delta_{jl}-\operatorname{Ric}_{il}\delta_{jk}-\operatorname{Ric}_{jk}\delta_{il}+\operatorname{Ric}_{jl}\delta_{ik})\\
&+2b^2|\operatorname{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})\\
&+\frac{8}{n^2}(a-b)(2b+(n-2)a)\operatorname{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

由 (63) 和 (64) 可得

$$
\begin{aligned}
& Q(S)_{ijkl} - Q(R)_{ijkl} \\
= {} & 2b \sum_{p,q=1}^{n} \operatorname{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& +(4b + 2(n-2)b^2)(\operatorname{Ric}_{ik}\operatorname{Ric}_{jl} - \operatorname{Ric}_{il}\operatorname{Ric}_{jk}) \\
& -2b^2(\operatorname{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \operatorname{Ric}^2_{jk}\delta_{il} - \operatorname{Ric}^2_{il}\delta_{jk} + \operatorname{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right) \\
& \qquad \cdot \operatorname{scal}(\operatorname{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \operatorname{Ric}_{jk}\delta_{il} - \operatorname{Ric}_{il}\delta_{jk} + \operatorname{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& +2b^2|\operatorname{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \\
& +\frac{8}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\operatorname{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

证明完毕. □

引理 8.3 对每个代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \ell_{a,b}(Q(R))_{ijkl} - Q(R)_{ijkl} \\
= {} & 2b \sum_{p,q=1}^{n} \operatorname{Ric}_{pq}(R_{ipkq}\delta_{jl} - R_{iplq}\delta_{jk} - R_{jpkq}\delta_{il} + R_{jplq}\delta_{ik}) \\
& +\frac{4}{n}(a-b)|\operatorname{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

证明 为简单起见, 记 $S = Q(R)$. 则

$$
\begin{aligned}
& \ell_{a,b}(S)_{ijkl} - S_{ijkl} \\
= {} & b(\operatorname{Ric}(S)_{ik}\delta_{jl} - \operatorname{Ric}(S)_{jk}\delta_{il} - \operatorname{Ric}(S)_{il}\delta_{jk} + \operatorname{Ric}(S)_{jl}\delta_{ik}) \\
& +\frac{2}{n}(a-b)\operatorname{scal}(S)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

并且, 我们有

$$
\operatorname{Ric}(S)_{ik} = 2\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}\operatorname{Ric}_{pq} \quad \text{和} \quad \operatorname{scal}(S) = 2|\operatorname{Ric}|^2.
$$

结合上述事实, 可得结论成立. □

引理 8.4 对每个代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
Q(\ell_{a,b}(R)) = {}& \ell_{a,b}(Q(R)) + (2b + (n-2)b^2)\,\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{Ric} - 2b^2\,\mathrm{Ric}^2 \owedge \mathrm{id} \\
& + \left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right) \mathrm{scal}\,\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{id} \\
& + \frac{1}{n}(nb^2 - 2(a-b))|\mathrm{Ric}|^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id} \\
& + \frac{4}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\,\mathrm{scal}^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id}.
\end{aligned}
$$

证明 由引理 8.2 和 8.3 知

$$
\begin{aligned}
& Q(\ell_{a,b}(R))_{ijkl} - \ell_{a,b}(Q(R))_{ijkl} \\
= {}& (4b + 2(n-2)b^2)(\,\mathrm{Ric}_{ik}\,\mathrm{Ric}_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}\,\mathrm{Ric}_{jk}) \\
& -2b^2(\,\mathrm{Ric}^2_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}^2_{jk}\delta_{il} - \mathrm{Ric}^2_{il}\delta_{jk} + \mathrm{Ric}^2_{jl}\delta_{ik}) \\
& + \left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right) \\
& \quad \cdot \mathrm{scal}\,(\mathrm{Ric}_{ik}\delta_{jl} - \mathrm{Ric}_{jk}\delta_{il} - \mathrm{Ric}_{il}\delta_{jk} + \mathrm{Ric}_{jl}\delta_{ik}) \\
& + \frac{2}{n}(nb^2 - 2(a-b))|\mathrm{Ric}|^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \\
& + \frac{8}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\,\mathrm{scal}^2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}
$$

由此可得结论成立. □

任给一个代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$
\begin{aligned}
D_{a,b}(R) = {}& ((n-2)b^2 - 2(a-b))\,\mathring{\mathrm{Ric}} \owedge \mathring{\mathrm{Ric}} \\
& + 2a\,\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{Ric} + 2b^2\,\mathring{\mathrm{Ric}}^2 \owedge \mathrm{id} \\
& + \frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id}\,.
\end{aligned} \tag{65}
$$

显然, $D_{a,b}(R) \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$. $D_{a,b}(R)$ 的 Ricci 张量和数量曲率为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R)) = {}& -4b\mathrm{Ric}^2 + \frac{4}{n}(2b + (n-2)a)\,\mathrm{scal}\,\mathrm{Ric} \\
& + 2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\,\mathrm{id} \\
& + \frac{4}{n^2}(a-b)\,\mathrm{scal}^2\,\mathrm{id}
\end{aligned} \tag{66}
$$

和

$$\operatorname{scal}(D_{a,b}(R)) = \frac{4(n-1)}{n} a \operatorname{scal}^2 - 4b|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 + 2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2. \tag{67}$$

命题 8.5 (C. Böhm, B. Wilking [14])　对每个代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\ell_{a,b}^{-1}(Q(\ell_{a,b}(R))) = Q(R) + D_{a,b}(R).$$

证明　注意到

$$\ell_{a,b}(D_{a,b}(R)) = D_{a,b}(R) + b\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R)) \owedge \mathrm{id} + \frac{1}{n}(a-b)\operatorname{scal}(D_{a,b}(R))\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id}\,.$$

由 (65) 可得

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) = {} & (2b + (n-2)b^2)\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{Ric} + 2b^2\mathrm{Ric}^2 \owedge \mathrm{id} \\ & - \frac{2}{n}(nb^2 - 2(a-b))\operatorname{scal}\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{id} \\ & + \frac{nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id} \\ & + \frac{1}{n^2}(nb^2 - 2(a-b))\operatorname{scal}^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

由 (66) 和 (67) 得

$$\begin{aligned} \ell_{a,b}(D_{a,b}(R)) = {} & (2b + (n-2)b^2)\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{Ric} - 2b^2\mathrm{Ric}^2 \owedge \mathrm{id} \\ & + \left(2b^2 + \frac{4}{n}(a-b)(1+(n-2)b)\right)\operatorname{scal}\mathrm{Ric} \owedge \mathrm{id} \\ & + \frac{1}{n}(nb^2 - 2(a-b))|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id} \\ & + \frac{1}{n^2}(nb^2 - 2(a-b))\operatorname{scal}^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id} \\ & + \frac{4}{n^2}(a-b)(b+(n-1)a)\operatorname{scal}^2\,\mathrm{id} \owedge \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

利用引理 8.4和等式 $|\mathrm{Ric}|^2 = |\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 + \frac{1}{n}\operatorname{scal}^2$, 我们可得

$$Q(\ell_{a,b}(R)) = \ell_{a,b}(Q(R)) + l_{a,b}(D_{a,b}(R)).$$

证明完毕. □

8.2 构造一族不变锥

考虑锥 $C \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 4$. 我们称 C 满足条件 $(*)$, 如果下面的条件成立:

- C 是闭的, $\mathrm{O}(n)$ 不变的.
- C 在 Hamilton ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.
- 每个代数曲率张量 $R \in C$ 具有非负的截面曲率.
- 如果 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 具有非负曲率算子, 则 $R \in C$.

构造满足条件 $(*)$ 的例子是非常不平凡的事情. 其中一个例子就是非负曲率算子构成的锥; 另一个例子是第 7.5 节构造的锥 $\hat{C}$.

在这一节剩下的部分, 我们将给出两个结果. 当 C 是非负曲率算子构成的锥时, 这个结果是由 C. Böhm 和 B. Wilking 给出的 (见 [14], 引理 3.4 和 3.5). 在第 8.3 节, 我们将应用这些结果到第 7.5 节定义的锥 $\hat{C}$ 上.

命题 8.6 假设锥 $C \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 满足条件 $(*)$. 固定实数 $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 记

$$2a = \frac{2b + (n-2)b^2}{1 + (n-2)b^2}, \quad \delta = 1 - \frac{1}{1 + (n-2)b^2}.$$

则锥

$$\left\{\ell_{a,b}(R) : R \in C,\ \mathrm{Ric} \geqslant \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,\mathrm{id}\right\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}(R) = Q(R)$ 下是不变的.

证明 该命题的证明类似于 [14] 中引理 3.4 的证明. 利用命题 8.5, 我们只需要证明锥

$$\left\{R \in C : \mathrm{Ric} \geqslant \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,\mathrm{id}\right\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}(R) = Q(R) + D_{a,b}(R)$ 下是不变的. 为此, 我们考虑一个代数曲率张量 $R \in C \setminus \{0\}$ 满足 $\mathrm{Ric} \geqslant \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,\mathrm{id}$. 我们将证明:

(i) $Q(R)+D_{a,b}(R)$ 落在切锥 T_RC 的内部.

(ii) 如果 $v\in\mathbb{R}^n$ 是单位向量, 满足 $\mathrm{Ric}(v,v)=\frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}$, 则

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v)+\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v)\\&>\frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,(Q(R))+\frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,(D_{a,b}(R)).\end{aligned}$$

(i) 的证明: 通过伸缩变换, 我们假设 $\mathrm{scal}=n$. 同时, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的单位正交基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得当 $i\neq j$ 时, 有 $\mathrm{Ric}(e_i,e_j)=0$. 为简单起见, 我们记 $\mathrm{Ric}(e_k,e_k)=1+\lambda_k$, 其中 $\lambda_k\geqslant\delta-1$, 并且

$$\sum_{k=1}^n\lambda_k=0.$$

固定一对指标 $i\neq j$. 易见, $e_i\wedge e_j$ 是 $D_{a,b}(R)$ 的对应特征值 $\sigma_{ij}=D_{a,b}(R)(e_i,e_j,e_i,e_j)$ 的特征向量. 利用 $D_{a,b}(R)$ 的定义知

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_{ij}=&((n-2)b^2-2(a-b))\lambda_i\lambda_j\\&+2a(1+\lambda_i)(1+\lambda_j)+b^2(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\\&+\frac{nb^2(1-2b)-2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_{ij}=&(2b+(n-2)b^2)\Big(\lambda_i+\frac{1}{1+(n-2)b^2}\Big)\Big(\lambda_j+\frac{1}{1+(n-2)b^2}\Big)\\&+2a\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}+b^2(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\\&+\frac{nb^2(1-2b)-2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2,\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}>\frac{nb^2(1-2b)-2(a-b)(1-2b+nb^2)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.$$

并且, 由 a 和 b 的选择,

$$\begin{aligned}&nb^2(1-2b)-2(a-b)(1-2b+nb^2)\\&=2b^2(1-2b)\frac{1+(n-2)b}{1+(n-2)b^2}\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此 $\sigma_{ij} > 0$, 从而 $D_{a,b}(R)$ 具有正的曲率算子.

根据假设, C 是凸锥, 包含了所有非负的曲率算子. 所以, $D_{a,b}(R)$ 落在切锥 T_RC 的内部. 并且, 因为 C 在 Hamilton ODE 下是不变的, 所以 $Q(R) \in T_RC$. 从而, $Q(R) + D_{a,b}(R)$ 落在切锥 T_RC 的内部.

(ii) 的证明: 假设存在某个单位向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathrm{Ric}(v,v) = \dfrac{\delta}{n}$ scal. 通过伸缩变换, 我们可假设 $\mathrm{scal} = n$. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基, 且当 $i \neq j$ 时, $\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = 0$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) &= 2\sum_{k=1}^{n} R(v,e_k,v,e_k)\mathrm{Ric}(e_k,e_k)\\ &\geqslant 2\delta\sum_{k=1}^{n} R(v,e_k,v,e_k) = 2\delta\,\mathrm{Ric}(v,v) = 2\delta^2,\end{aligned}$$

并且

$$\mathrm{scal}(Q(R)) = 2|\mathrm{Ric}|^2 = 2n + 2|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.$$

由此可得

$$\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,(Q(R)) = -2\delta(1-\delta) - \frac{2}{n}\delta|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.$$

利用 (66) 和 (67),

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) = &-4b\delta^2 + 4(2b+(n-2)a)\delta + 4(a-b)\\ &+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2,\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)) = &\,4n(n-1)a - 4b|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\\ &+2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}\,(D_{a,b}(R))\\ =&\,4a(1-\delta) - 4b(1-\delta)^2\\ &+\frac{4b}{n}\delta|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 + 2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}(1-\delta)|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

结合上述事实, 可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ric}(Q(R))(v,v)+\operatorname{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v)-\frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(Q(R))-\frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(D_{a,b}(R))\\ \geqslant&-2\delta(1-\delta)+4a(1-\delta)-4b(1-\delta)^2\\ &-\frac{2(1-2b)}{n}\delta|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2+2\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}(1-\delta)|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

注意到根据我们对 a,b,δ 的选择, 有 $2a-2b(1-\delta)=\delta$. 由此可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ric}(Q(R))(v,v)+\operatorname{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v)-\frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(Q(R))-\frac{\delta}{n}\operatorname{scal}(D_{a,b}(R))\\ \geqslant&-\frac{2(1-2b)}{n}\delta|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2+2\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}(1-\delta)|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

断言: 右端项是正的. 事实上, 因为 $\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}(v,v)=\delta-1<0$, 所以 $|\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}|^2>0$. 因此, 只需证

$$\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}(1-\delta)>(1-2b)\delta. \tag{68}$$

由 a,b 的选择,

$$\begin{aligned}&n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)\\ &-(1+2(n-1)a)(n-2)b^2(1-2b)\\ =&\,2nb^2(1+(n-2)b)+(n-1)(2b+(n-2)b^2)(1-2b)\\ &-2(n-1)a(1+(n-2)b^2)(1-2b)\\ =&\,2nb^2(1+(n-2)b)>0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)}{1+2(n-1)a}>(n-2)b^2(1-2b).$$

因为 $\delta=(n-2)b^2(1-\delta)$, 所以 (68) 成立. □

命题 8.7 假设锥 $C\subset\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 满足条件 $(*)$. 固定实数 $a\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, 记

$$b=\frac{1}{2},\quad \delta=1-\frac{4}{n-2+8a}.$$

则锥

$$\left\{\ell_{a,b}(R) : R \in C, \quad \text{Ric} \geqslant \frac{\delta}{n} \text{ scal id}\right\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}(R) = Q(R)$ 下是不变的.

证明 该命题的证明类似于 [14] 中引理 3.5 的证明. 类似于上述命题, 我们只需要证明锥

$$\left\{R \in C : \text{Ric} \geqslant \frac{\delta}{n} \text{ scal id}\right\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}(R) = Q(R) + D_{a,b}(R)$ 下是不变的. 为此, 我们考虑一个代数曲率张量 $R \in C \setminus \{0\}$ 满足 $\text{Ric} \geqslant \frac{\delta}{n}$ scal id. 我们将证明:

(i) $Q(R) + D_{a,b}(R)$ 落在切锥 $T_R C$ 的内部.

(ii) 如果 $v \in \mathbb{R}^n$ 是单位向量, 满足 $\text{Ric}(v, v) = \frac{\delta}{n}$ scal, 则

$$\begin{aligned}&\text{Ric}(Q(R))(v, v) + \text{Ric}(D_{a,b}(R))(v, v)\\ &> \frac{\delta}{n} \text{ scal } (Q(R)) + \frac{\delta}{n} \text{ scal } (D_{a,b}(R)).\end{aligned}$$

(i) 的证明: 通过伸缩变换, 我们假设 scal $= n$. 存在 $\mathbb{R}^n$ 的单位正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得当 $i \neq j$ 时, 有 $\text{Ric}(e_i, e_j) = 0$. 为简单起见, 我们记 $\text{Ric}(e_k, e_k) = 1 + \lambda_k$, 其中 $\lambda_k \geqslant \delta - 1$, 并且

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0.$$

固定一对指标 $i \neq j$. 易见, $e_i \wedge e_j$ 是 $D_{a,b}(R)$ 的对应于特征值 $\sigma_{ij} = D_{a,b}(R)(e_i, e_j, e_i, e_j)$ 的特征向量. 利用 $D_{a,b}(R)$ 的定义,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma_{ij} = &\left(\frac{n+2}{4} - 2a\right)\lambda_i\lambda_j + 2a(1+\lambda_i)(1+\lambda_j) + \frac{1}{4}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)\\ &-\frac{1}{4}\frac{2a-1}{1+2(n-1)a}|\mathring{\text{Ric}}|^2.\end{aligned}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma_{ij} = & \frac{n+2}{4}\left(\lambda_i + \frac{4}{n+2}\right)\left(\lambda_j + \frac{4}{n+2}\right) \\
& +(2a-1)\left(\lambda_i + \lambda_j + \frac{8}{n-2+8a}\right) + \frac{1}{4}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \\
& +\frac{n-2}{n+2} + (2a-1)\frac{n-10+8a}{n-2+8a} - \frac{1}{4}\frac{2a-1}{1+2(n-1)a}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2,
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{1}{2}\sigma_{ij} \geqslant \frac{n-2}{n+2} + (2a-1)\frac{n-10+8a}{n-2+8a} - \frac{1}{4}\frac{2a-1}{1+2(n-1)a}|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.
$$

由假设知 $\lambda_k \geqslant \delta - 1$, $k = 1, \cdots, n$. 因为

$$
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0,
$$

所以 $\lambda_k \leqslant (n-1)(1-\delta)$, $k = 1, \cdots, n$. 从而有

$$
\begin{aligned}
& n(n-1)(1-\delta)^2 - |\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 \\
= & \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + 1 - \delta)((n-1)(1-\delta) - \lambda_k) \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

结合所有的事实, 可得

$$
\frac{1}{2}\sigma_{ij} \geqslant \frac{n-2}{n+2} + (2a-1)\frac{n-10+8a}{n-2+8a} - \frac{2a-1}{1+2(n-1)a}\frac{4n(n-1)}{(n-2+8a)^2}.
$$

因为 $a > \dfrac{1}{2}$, 所以

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(n-2+8a)\sigma_{ij} \\
\geqslant & \frac{n-2}{n+2}(n-2+8a) + (2a-1)(n-10+8a) - \frac{2a-1}{1+2(n-1)a}\frac{4n(n-1)}{n-2+8a} \\
> & \frac{n-2}{n+2}(n-2+8a) + (2a-1)(n-10+8a) - (2a-1)\frac{4(n-1)}{n+2} \\
= & (n-3) + (2a-1)\left(n-2-\frac{4}{n+2}\right) + (4a-3)^2 \\
> & 0.
\end{aligned}
$$

因此 $D_{a,b}(R)$ 具有正的曲率算子.

所以, $D_{a,b}(R)$ 落在切锥 T_RC 的内部. 并且, 因为 C 在 Hamilton ODE 下是不变的, 所以 $Q(R) \in T_RC$. 从而, $Q(R) + D_{a,b}(R)$ 落在切锥 T_RC 的内部.

(ii) 的证明: 假设存在某个单位向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathrm{Ric}(v,v) = \dfrac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}$. 通过伸缩变换, 我们可假设 $\mathrm{scal} = n$. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组单位正交基, 且当 $i \neq j$ 时, $\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = 0$. 类似于命题 8.6 的证明, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) + \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}(Q(R)) - \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)) \\
\geqslant\; & -2\delta(1-\delta) + 4a(1-\delta) - 4b(1-\delta)^2 \\
& - \frac{2(1-2b)}{n}\delta|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 + 2\frac{n^2b^2 - 2(n-1)(a-b)(1-2b)}{n(1+2(n-1)a)}(1-\delta)|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2.
\end{aligned}$$

因为 $b = \dfrac{1}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(Q(R))(v,v) + \mathrm{Ric}(D_{a,b}(R))(v,v) - \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}(Q(R)) - \frac{\delta}{n}\,\mathrm{scal}(D_{a,b}(R)) \\
\geqslant\; & (4a-2)(1-\delta) + \frac{1}{2}\frac{n}{1+2(n-1)a}(1-\delta)|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 > 0.
\end{aligned}$$

证明完毕. □

8.3 微分球定理的证明

在这一节中, 我们固定整数 $n \geqslant 4$. 并且, 设 $\hat{C} \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是第 7.5 节介绍的锥. 对每个 $s > 0$, 定义锥 $\hat{C}(s) \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\hat{C}(s) = \left\{\ell_{a(s),b(s)}(R) : R \in \hat{C},\ \mathrm{Ric} \geqslant \frac{\delta(s)}{n}\,\mathrm{scal}\ \mathrm{id}\right\},$$

其中

$$2a(s) = \begin{cases} \dfrac{2s + (n-2)s^2}{1 + (n-2)s^2}, & \text{当 } 0 < s \leqslant \dfrac{1}{2}, \\[2ex] 2s, & \text{当 } s > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$2b(s)=\begin{cases}2s, & \text{当 } 0<s\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2ex] 1, & \text{当 } s>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$$\delta(s)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{1+(n-2)s^2}, & \text{当 } 0<s\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2ex] 1-\dfrac{4}{n-2+8s}, & \text{当 } s>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

注意到 $a(s),b(s),\delta(s)$ 都是 s 的连续函数.

对每个 $s>0$, 锥 $\hat{C}(s)$ 是闭的, 凸的, $\mathrm{O}(n)$ 不变的. 并且, 对每个 $s>0$, 点 I 落在 $\hat{C}(s)$ 的内部.

命题 8.8 对 $s>0$, 锥 $\hat{C}(s)$ 具有下面的性质:

(i) 如果存在 $s>0$, 使得 $R\in\hat{C}(s)\setminus\{0\}$, 则 $Q(R)$ 在 R 处落在 $\hat{C}(s)$ 的切锥的内部.

(ii) 如果存在 $s>\frac{1}{2}$, 使得 $R\in\hat{C}(s)$, 则 R 是弱 $\dfrac{2s-1}{2s+n-1}$-夹的.

证明 第一个结论是命题 8.6 和 8.7 的直接推论. 下面我们给出第二个结论的证明. 固定实数 $s>\frac{1}{2}$. $\hat{C}(s)$ 中的每个代数曲率张量可以写成 $\ell_{s,\frac{1}{2}}(R)$ 的形式, 其中 $R\in\hat{C}$. 因为 R 具有非负的截面曲率, 所以对单位正交的 2-标架 $\{e_1,e_2\}\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$0\leqslant R(e_1,e_2,e_1,e_2)\leqslant\frac{1}{2}(\mathrm{Ric}(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(e_2,e_2)).$$

利用 (62),

$$\ell_{s,\frac{1}{2}}(R)(e_1,e_2,e_1,e_2)\geqslant\frac{2s-1}{n}\,\mathrm{scal},$$

并且

$$\begin{aligned}\ell_{s,\frac{1}{2}}(R)(e_1,e_2,e_1,e_2)&\leqslant\mathrm{Ric}(e_1,e_1)+\mathrm{Ric}(e_2,e_2)+\frac{2s-1}{n}\,\mathrm{scal}\\&\leqslant\frac{2s+n-1}{n}\,\mathrm{scal}\,.\end{aligned}$$

所以, 曲率张量 $\ell_{s,\frac{1}{2}}(R)$ 是弱 $\dfrac{2s-1}{2s+n-1}$-夹的. □

下面, 我们将构造在定义 5.12 这种意义下的夹集合. 为此, 我们利用 [14] 中的想法.

引理 8.9 固定闭区间 $[\alpha,\beta] \subset (0,\infty)$. 则存在实数 $\varepsilon > 0$, 依赖于 α,β,n, 具有下面的性质:

如果 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是闭集, 在 Hamilton ODE 下不变, 并且存在某个 $s \in [\alpha,\beta]$ 和 $h > 0$, 使得

$$F \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + hI \in \hat{C}(s)\}.$$

那么集合

$$\hat{F} = \{R \in F : R + 2hI \in \hat{C}(s+\varepsilon)\}$$

在 Hamilton ODE 下也是不变的. 并且, 我们有

$$\{R \in F : \text{ scal }(R) \leqslant h\} \subset \hat{F}.$$

证明 这个证明类似于 [14] 中定理 4.1 的证明 (见 [20], 命题 16). 如果存在 $s \in [\alpha,\beta+1]$, 使得 $R \in \hat{C}(s) \setminus \{0\}$, 则由命题 8.8 知, $Q(R)$ 落在切锥 $T_R\hat{C}(s)$ 的内部. 所以, 存在常数 $N \geqslant 1$, 依赖于 α,β,n, 具有下面的性质: 如果 $\text{scal}(R) \geqslant N$, 并且存在 $s \in [\alpha,\beta+1]$, 使得 $R \in \hat{C}(s)$, 那么 $Q(R-2I)$ 落在切锥 $T_R\hat{C}(s)$ 的内部.

因为锥 $\hat{C}(s)$ 关于 s 是连续变化的, 所以存在 $\varepsilon \in (0,1]$, 依赖于 α,β,n, 使得对每个 $s \in [\alpha,\beta]$, 有

$$\begin{aligned}&\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + I \in \hat{C}(s),\ \text{scal}(R) \leqslant N\}\\ &\subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + 2I \in \hat{C}(s+\varepsilon)\}.\end{aligned} \tag{69}$$

断言: ε 具有所需要的性质. 我们只需要证明在 $h = 1$ 的情形下是成立的. (其余情形可以通过伸缩变换得到.) 因此, 我们假设 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是闭集, 在 Hamilton ODE 下是不变的, 并且对某个 $s \in [\alpha,\beta]$,

$$F \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + I \in \hat{C}(s)\}. \tag{70}$$

定义集合 $\hat{F} \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{F} = \{R \in F : R + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon)\}.$$

利用 (69) 和 (70) 可得

$$\{R \in F : \operatorname{scal}(R) \leqslant N\} \subset \hat{F}. \tag{71}$$

下面我们证明 $\hat{F}$ 在 Hamilton ODE 下是不变的. 假设 $R(t), t \in [0, T)$, 是 ODE $\frac{d}{dt}R(t) = Q(R(t))$ 的解, 使得 $R(0) \in \hat{F}$. 因为 F 在 Hamilton ODE 下是不变的, 所以对所有 $t \in [0, T)$, 有 $R(t) \in F$. 因此, 我们只需要证明对所有 $t \in [0, T)$, 有 $R(t) + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon)$. 假设结论不成立. 定义

$$t_0 = \inf\{t \in [0, T) : R(t) + 2I \notin \hat{C}(s + \varepsilon)\}.$$

显然, $R(t_0) + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon)$. 我们分成两种情形来讨论:

情形 1: 假设 $\operatorname{scal}(R(t_0)) \geqslant N$. 由 N 的定义, $Q(R(t_0))$ 落在切锥 $T_{R(t_0)+2I}\hat{C}(s + \varepsilon)$ 的内部. 又由命题 5.4, 存在实数 $t_1 \in (t_0, T)$, 使得对所有 $t \in [t_0, t_1]$, 有 $R(t) + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon)$. 这与 t_0 的定义矛盾.

情形 2: 假设 $\operatorname{scal}(R(t_0)) < N$. 由连续性, 存在实数 $t_1 \in (t_0, T)$, 使得对所有 $t \in [t_0, t_1]$, 有 $\operatorname{scal}(R(t)) \leqslant N$. 利用 (71) 知, 对所有 $t \in [t_0, t_1]$, 有 $R(t) + 2I \in \hat{C}(s + \varepsilon)$. 这与 t_0 的定义矛盾. 证明完毕. □

命题 8.10 设 K 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 的一个紧致子集. 假设 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是包含 K 的最小的闭凸集, 它是 $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 并且在 Hamilton ODE 下是不变的. 如果对某个实数 $s_0 > 0$ 和 $h_0 > 0$, 有

$$F \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + h_0 I \in \hat{C}(s_0)\},$$

那么 F 是夹集合.

证明 设 $\mathscr{S}$ 是所有具有下面性质的实数 $s > 0$ 所构成的集合:

$$F \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + hI \in \hat{C}(s)\},$$

其中 h 是某个正实数. 由假设知 $s_0 \in \mathscr{S}$. 特别地, 集合 $\mathscr{S}$ 非空.

记 σ 为 $\mathscr{S}$ 的上确界. 选取实数序列 $s_j \in \mathscr{S}$, 使得 $\lim_{j\to\infty} s_j = \sigma$. 对每个 j, 存在实数 $h_j > 0$, 使得

$$F \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + h_j I \in \hat{C}(s_j)\}.$$

如果需要, 增大 h_j, 使得对所有 j,

$$h_j \geqslant \sup\{\operatorname{scal}(R) : R \in K\}. \tag{72}$$

断言: $\sigma = \infty$. 假设断言不成立, 则序列 $\{s_j : j = 1, 2, \cdots\}$ 包含在 $(0, \infty)$ 的一个紧致区间内. 由引理 8.9 知, 存在实数 $\varepsilon > 0$ 使得对每个 j,

$$\hat{F}_j = \{R \in F : R + 2h_j I \in \hat{C}(s_j + \varepsilon)\}$$

在 Hamilton ODE 下不变, 并且

$$\{R \in F : \operatorname{scal}(R) \leqslant h_j\} \subset \hat{F}_j. \tag{73}$$

根据 (72) 和 (73), 对所有 j, $K \subset \hat{F}_j$. 并且, $\hat{F}_j$ 是闭凸集, 它是 $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 并且在 Hamilton ODE 下是不变的. 从而, 对所有 j, $F \subset \hat{F}_j$. 这意味着 $s_j + \varepsilon \in \mathscr{S}$. 另一方面, $\varepsilon > 0$ 不依赖于 j. 所以, 当 j 充分大时, $s_j + \varepsilon > \sigma$. 这与 σ 的定义矛盾.

从而, $\lim_{j\to\infty} s_j = \sigma = \infty$. 因此, 由命题 8.8 可得 F 是一个夹集合. □

推论 8.11 设 K 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 的一个紧致子集, 并且包含在锥 $\hat{C}$ 的内部. 那么存在一个夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 使得 $K \subset F$.

证明 设 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是包含 K 的最小的闭凸集, 它是 $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 并且在 Hamilton ODE 下是不变的. 由于 K 包含在锥 $\hat{C}$ 的内部, 所以存在实数 $s_0 > 0$, 使得 $K \subset \hat{C}(s_0)$. 锥 $\hat{C}(s_0)$ 是闭凸的, $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 并且在 Hamilton ODE 下是不变的. 从而, $F \subset \hat{C}(s_0)$. 所以, 由命题 8.10 可知 F 是一个夹集合. □

证明夹集合的存在性后, 由定理 5.23 可得 Ricci 流的收敛性.

定理 8.12 (S. Brendle, R. Schoen [20]) 设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量. 假设所有点 $p \in M$ 上关于度量 g_0 的曲率张量包含于锥 $\hat{C}$ 的内部. 我们还假设 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于一具有常截面曲率 1 的度量.

证明 由推论 8.11, 存在一个夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 使得在所有点 $p \in M$ 处度量 g_0 的曲率张量包含于 F. 所以, 由定理 5.23 可知结论成立. □

接下来, 我们要证明如果 M 满足逐点的严格 1/4-夹条件, 那么定理 8.12 中的条件是自动满足的 (见 [20], 推论 22).

命题 8.13 设 (M, g) 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的黎曼流形. 那么

(i) 若 (M, g) 满足逐点的弱 1/4-夹条件, 那么对所有点 $p \in M$, (M, g) 的曲率张量包含于锥 $\hat{C}$ 的内部.

(ii) 若 (M, g) 满足逐点的严格 1/4-夹条件, 那么对所有点 $p \in M$, (M, g) 的曲率张量包含于锥 $\hat{C}$ 的内部.

证明 对每个点 $p \in M$, 记 $K_{\max}(p)$ 为点 p 处最大的截面曲率. 类似地, 记 $K_{\min}(p)$ 为点 p 处最小的截面曲率. 若 (M, g) 满足逐点的弱 1/4-夹条件, 那么在所有点 $p \in M$ 处 $0 \leqslant K_{\max}(p) \leqslant 4K_{\min}(p)$. 由命题 1.9, 对所有点 $p \in M$ 和所有单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$,

$$R(e_1, e_2, e_3, e_4) \leqslant \frac{2}{3}(K_{\max}(p) - K_{\min}(p)) \leqslant 2K_{\min}(p).$$

从而, 对所有实数 $\lambda, \mu \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+\mu^2 R(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda\mu R(e_1, e_2, e_3, e_4)
\end{aligned}$$

$$\geqslant (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu)K_{\min}(p)$$
$$= ((1 - \lambda\mu)^2 + (\lambda - \mu)^2)K_{\min}(p)$$
$$\geqslant 0.$$

再由命题 7.18, 对所有点 $p \in M$, (M, g) 的曲率张量包含于锥 $\hat{C}$ 的内部. 所以第一个结论成立. 同理可以证明第二个结论. □

推论 8.14 (S. Brendle, R. Schoen [20]) 设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量. 假设 (M, g_0) 满足逐点的严格 1/4-夹条件. 我们还假设 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\dfrac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于一具有常截面曲率 1 的度量.

8.4 改进的收敛性定理

在这一节中, 我们要证明定理 8.12 的一个推广. 为此目的, 我们考虑在第 7.4 节中介绍的锥 $\tilde{C} \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$. 同时, 设 $G \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R})$ 是在第 7.6 节中定义的集合.

命题 8.15 考虑一对实数 a, b, 满足 $2a = 2b + (n-2)b^2$, $b \in \left(0, \dfrac{\sqrt{2n(n-2)+4}-2}{n(n-2)}\right]$. 则集合 $\ell_{a,b}(G)$ 在 ODE $\dfrac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

证明 由命题 8.5, 只需证集合 G 在 ODE $\dfrac{d}{dt}R = Q(R) + D_{a,b}(R)$ 下是不变的, 其中 $D_{a,b}(R)$ 由 (65) 给出. 为此, 我们考虑一个代数曲率张量 $R \in G$. 根据命题 7.23, 我们有 $R \in \tilde{C}$. 所以, R 具有非负 Ricci 曲率. 并且, 由 a, b 的选择,

$$(n-2)b^2 - 2(a-b) = 0,$$
$$nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2) \geqslant 0.$$

从而, 根据 (65), $D_{a,b}(R)$ 具有非负曲率算子. 特别地, $D_{a,b}(R) \in T_R G$. 另

一方面, 由命题 7.28, 我们有 $Q(R) \in T_RG$. 结合以上的事实, 有 $Q(R) + D_{a,b}(R) \in T_RG$. 所以, 集合 G 在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R) + D_{a,b}(R)$ 下是不变的. □

命题 8.16 设 K 是 $\mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 的一个紧致子集, 包含于锥 $\tilde{C}$ 的内部. 那么, 存在一个夹集合 $F \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 使得 $K \subset F$.

证明 设 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$ 是包含 K 的最小的闭凸集, 它是 $\mathrm{O}(n)$ 不变的, 并且在 Hamilton ODE 下是不变的. 由假设, 集合 K 包含于锥 $\tilde{C}$ 的内部. 利用命题 7.14, 对所有 $R \in K$, 所有单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset \mathbb{R}^n$ 和所有满足 $(1-\lambda^2)(1-\mu^2) = 0$ 的一对实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned}
&R(e_1,e_3,e_1,e_3) + \lambda^2 R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&+\mu^2 R(e_2,e_3,e_2,e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\
&-2\lambda\mu R(e_1,e_2,e_3,e_4) > 0.
\end{aligned}$$

从而, 存在一个正常数 N, 使得

$$\begin{aligned}
&R(e_1,e_3,e_1,e_3) + \lambda^2 R(e_1,e_4,e_1,e_4)\\
&+\mu^2 R(e_2,e_3,e_2,e_3) + \lambda^2\mu^2 R(e_2,e_4,e_2,e_4)\\
&-2\lambda\mu R(e_1,e_2,e_3,e_4) + N(1-\lambda^2)(1-\mu^2) > 0.
\end{aligned}$$

不失一般性, 我们假设 $N = 1$. 由命题 7.22, K 包含于集合 G 的内部. 接下来我们考虑一对实数 a, b, 满足 $2a = 2b + (n-2)b^2$, $b \in \left(0, \frac{\sqrt{2n(n-2)+4}-2}{n(n-2)}\right]$. 由连续性, 选择充分小的 b, 使得 $K \subset \ell_{a,b}(G)$. 集合 $\ell_{a,b}(G)$ 是闭凸的, $\mathrm{O}(n)$ 不变的. 并且, 由命题 8.15, 集合 $\ell_{a,b}(G)$ 在 Hamilton ODE 下不变. 因此, $F \subset \ell_{a,b}(G)$.

接下来我们考虑在第 8.3 节中定义的锥 $\hat{C}(s)$, $s > 0$. 我们可以找到一个实数 $s_0 > 0$, 使得 $\ell_{a,b}(\hat{C}) \subset \hat{C}(s_0)$. 利用命题 7.24 可知, 对所有 $R \in G$, 有

$$\ell_{a,b}(R) + (1 + 2(n-1)a)I = \ell_{a,b}(R+I) \in \ell_{a,b}(\hat{C}) \subset \hat{C}(s_0).$$

所以,

$$F \subset \ell_{a,b}(G) \subset \{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R + (1 + 2(n-1)a)I \in \hat{C}(s_0)\}.$$

从而, 由命题 8.10 知, F 是一个夹集合. □

利用定理 5.23, 我们可以得到下述的收敛性定理, 这个结果推广了以前 Huisken [54], Hamilton [45], Chen [28], Böhm 和 Wilking [14], Andrews 和 Nguyen [5] 的结果.

定理 8.17 (S. Brendle [17]) 设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量. 假设在所有点 $p \in M$ 处度量 g_0 的曲率张量包含于锥 $\tilde{C}$ 的内部. 我们还假设 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流的唯一的最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\frac{1}{2(n-1)(T-t)} g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于一具有常截面曲率 1 的度量.

证明 由命题 8.16, 存在一个夹集合 $F \subset \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n)$, 使得在所有点 $p \in M$ 处度量 g_0 的曲率张量包含于夹集合 F 的内部. 从而, 由定理 5.23 即可得到结论. □

注意到锥 $\tilde{C}$ 在三维情况下也有意义. 当 $n = 3$ 时, 锥 $\tilde{C}$ 包含所有具有 $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ 的代数曲率张量 $R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^3)$ (见问题集中问题 9). 所以, 定理 8.17 可以认为是 Hamilton 关于具有正 Ricci 曲率的三维流形的工作的一个推广 (见定理 6.8).



第九章　刚性结果

9.1　简介

在这一节中, 我们要证明一些刚性结果. 这些结果要用到两个主要的结论: 第一个是强极值原理的一个恰当的表述, 第二个是 Berger 的和乐群分类定理.

在第 9.2 节, 我们回顾了黎曼流形的和乐群的定义, 并且陈述了 Berger 的和乐群分类定理. 在第 9.3 节, 我们给出了 Bony 关于退化的椭圆方程组的强极值原理的另一个表述. 在第 9.4 节, 我们利用上述想法证明了具有非负 Ricci 曲率的三维流形的一个结构性定理 (见 [45]). 在第 9.5 节, 我们证明了具有非负迷向曲率的 Ricci 流的解的一个刚性结果. 为了叙述这个结论, 我们假设 $(M, g(t))$, $t \in [0, T]$, 是具有非负迷向曲率的 Ricci 流的一个解. 那么, 对任意的 $\tau \in (0, T)$, 流形 $(M, g(\tau))$ 要么具有正的迷向曲率, 要么具有特殊的和乐群.

在第 9.6 节, 我们学习具有非负迷向曲率的 Kähler-Einstein 流形和四元 Kähler 流形. 最后, 我们在第 9.7 节和第 9.8 节列出了主要的结果.

9.2　Berger 的和乐群分类定理

设 (M, g) 是一个完备的黎曼流形, p 是 M 上一个点. 一条以 p 为基点的环道指的是一个分段光滑的路径 $\gamma : [0, 1] \to M$, 满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. (M, g) 在 p 点的和乐群包含了所有的平行移动映射 P_γ, 其中 γ 是一条以 p 为基点的环道:

$$\mathrm{Hol}_p(M, g) = \{P_\gamma : T_pM \to T_pM : \gamma \text{ 是一条以 } p \text{ 为基点的环道}\}.$$

(M, g) 在 p 点的狭义和乐群定义为

$$\mathrm{Hol}_p^0(M, g) = \{P_\gamma : T_pM \to T_pM : \gamma \text{ 是一条以 } p \text{ 为基点的可缩环道}\}.$$

$\mathrm{Hol}_p(M, g)$ 的同构型不依赖于基点的选择. 精确地说, 对任意的一对点 $p, q \in M$, 和乐群 $\mathrm{Hol}_p(M, g)$ 共轭于 $\mathrm{Hol}_q(M, g)$.

完备的单连通黎曼流形的和乐群已经被 M. Berger [7] (也可见 [66, 79]) 分类了. 为了叙述 Berger 的定理, 我们先给出两个定义.

定义 9.1　*我们称 (M, g) 是局部可约的, 如果存在 T_pM 的一个非平凡的子空间, 它在 $\mathrm{Hol}_p^0(M, g)$ 的作用下不变.*

由 de Rham 的一个定理, 一个完备的流形 (M, g) 是局部可约的, 当且仅且 (M, g) 的万有覆盖等距于两个低维黎曼流形的乘积 (见 [13], 定理 10.43).

定义 9.2　*我们称 (M, g) 是局部对称的, 如果 (M, g) 的黎曼曲率张量是平行的.*

由 Cartan 的一个定理, 一个完备的流形 (M, g) 是局部对称的, 当且仅且 (M, g) 的万有覆盖等距于一个对称空间 (见 [13], 定理 10.72).

现在我们可以给出 Berger 的和乐群分类定理 (见 [13], 推论 10.92).

定理 9.3 (M. Berger [7])　*设 (M, g) 是一个不可约的完备的单连通黎曼流形, 而且不等距于一个对称空间. 那么下述结论之一成立:*

(i) $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{SO}(n)$.

(ii) $n = 2m \geqslant 4$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{U}(m)$.

(iii) $n = 4m \geqslant 8$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{Sp}(m) \cdot \mathrm{Sp}(1)$.

(iv) $n = 2m \geqslant 4$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{SU}(m)$.

(v) $n = 4m \geqslant 8$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{Sp}(m)$.

(vi) $n = 7$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{G}_2$.

(vii) $n = 8$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{Spin}(7)$.

Berger 的原始列表中包含了另一种可能性: $n = 16$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{Spin}(9)$. 尽管如此, 在这种情况下, D. Alekseevskii 的一个定理表明, (M, g) 一定等距于一个对称空间 (见 [1], 推论 1; [23], 定理 8.1).

我们特别指出情况 (iv)—(vii) 不会发生, 除非 (M, g) 是 Ricci 平坦的. 利用命题 7.3, 我们能得到下述的结论:

推论 9.4 设 (M, g) 是一个不可约的完备的单连通黎曼流形, 而且不等距于一个对称空间. 如果 (M, g) 具有非负的迷向曲率, 那么下述结论之一成立:

(i) $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{SO}(n)$.

(ii) $n = 2m \geqslant 4$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{U}(m)$.

(iii) $n = 4m \geqslant 8$ 且 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{Sp}(m) \cdot \mathrm{Sp}(1)$.

证明 假设结论不成立, 那么 (M, g) 一定是 Ricci 平坦的. 因为 (M, g) 具有非负的迷向曲率, 命题 7.3 意味着 (M, g) 一定是平坦的. 矛盾. □

9.3 强极值原理的一个表述

在这一节中, 我们要给出 Bony 关于退化的椭圆方程组的强极值原理 (见 [15]) 的另一个表述. 下述结论推广了 [15] 中的命题 3.1.

命题 9.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $X_1, \cdots, X_m$ 是 Ω 上的光滑向量

场. 假设 $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ 是一个非负的光滑函数, 满足

$$\sum_{j=1}^{m}(D^2\varphi)(X_j,X_j)\leqslant -L\inf_{|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi)+L|d\varphi|+L\varphi, \tag{74}$$

其中 L 是一个正常数. 记 $F=\{x\in\Omega:\varphi(x)=0\}$ 为函数 φ 的零点集. 那么对所有满足 $d(z,F)=|y-z|$ 的点 $y\in F$ 和 $z\in\mathbb{R}^n$, 有 $\langle X_j(y),y-z\rangle=0$.

证明 用反证法. 假设存在满足 $d(z,F)=|y-z|$ 的点 $y\in F$ 和 $z\in\mathbb{R}^n$, 且

$$\sum_{j=1}^{m}\langle X_j(y),y-z\rangle^2>0.$$

不失一般性, 我们假设对所有的点 $x\in F\setminus\{y\}$, 有 $|x-z|>|y-z|$. (否则, 我们用 $\frac{1}{2}(y+z)$ 代替 z.) 那么存在实数 $\alpha>0$, 使得

$$\begin{aligned}&4\alpha^2\sum_{j=1}^{m}\langle X_j(y),y-z\rangle^2-2\alpha\sum_{j=1}^{m}|X_j(y)|^2\\&>2L\alpha+2L\alpha|y-z|+L.\end{aligned}$$

由连续性, 存在一个有界开集 U, 使得 $y\in U,\overline{U}\subset\Omega$, 且对所有的 $x\in U$,

$$\begin{aligned}&4\alpha^2\sum_{j=1}^{m}\langle X_j(x),x-z\rangle^2-2\alpha\sum_{j=1}^{m}|X_j(x)|^2\\&>2L\alpha+2L\alpha|x-z|+L.\end{aligned}\tag{75}$$

我们定义一个函数 ψ 为

$$\psi(x)=e^{-\alpha|x-z|^2}-e^{-\alpha|y-z|^2}.$$

另外, 以 z 为球心、$|y-z|$ 为半径的闭球记为 B. 由假设, $F\bigcap B=\{y\}$. 这意味着, 对所有的 $x\in B\setminus\{y\}$, 有 $\varphi(x)>0$. 特别地, 对所有的 $x\in\partial U\bigcap B,\varphi(x)>0$. 所以, 存在一个实数 $\varepsilon>0$, 使得对所有的 $x\in\partial U\bigcap B$, $\varphi(x)-\varepsilon\psi(x)>0$. 注意到对所有的 $x\in\partial U\setminus B,\varphi(x)-\varepsilon\psi(x)>\varphi(x)\geqslant 0$. 结合所有的事实, 可知对所有的 $x\in\partial U,\varphi(x)-\varepsilon\psi(x)>0$.

由紧致性, 存在一个点 $x_0 \in \overline{U}$, 使得对所有的 $x \in U$, $\varphi(x_0)-\varepsilon\psi(x_0) \leqslant \varphi(x) - \varepsilon\psi(x)$. 特别地, $\varphi(x_0) - \varepsilon\psi(x_0) \leqslant \varphi(y) - \varepsilon\psi(y) = 0$. 从而, $x_0 \in U$, 且

$$\varphi(x_0) \leqslant \varepsilon\psi(x_0) \leqslant \varepsilon e^{-\alpha|x_0-z|^2}.$$

函数 $\varphi - \varepsilon\psi$ 在点 x_0 处达到局部最小值. 从而在点 x_0 处,

$$|d\varphi| = \varepsilon|d\psi| = 2\varepsilon\alpha|x_0 - z|e^{-\alpha|x_0-z|^2}.$$

并且, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(D^2\varphi)(X_j, X_j) &\geqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{m}(D^2\psi)(X_j, X_j)\\ &\geqslant \left(4\varepsilon\alpha^2 \sum_{j=1}^{m}\langle X_j(x_0), x_0 - z\rangle^2 - 2\varepsilon\alpha \sum_{j=1}^{m}|X_j(x_0)|^2\right)e^{-\alpha|x_0-z|^2}\end{aligned}$$

和

$$\inf_{|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi) \geqslant \varepsilon \inf_{|\xi|\leqslant 1}(D^2\psi)(\xi,\xi) \geqslant -2\varepsilon\alpha e^{-\alpha|x_0-z|^2}.$$

代入 (74), 可得

$$\begin{aligned}&4\alpha^2 \sum_{j=1}^{m}\langle X_j(x_0), x_0 - z\rangle^2 - 2\alpha \sum_{j=1}^{m}|X_j(x_0)|^2\\ &\leqslant 2L\alpha + 2L\alpha|x_0 - z| + L.\end{aligned}$$

这与 (75) 矛盾. □

接下来的结果与命题 5.5 是类似的.

命题 9.6 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $F \subset \Omega$ 是相对闭集. 又 $X_1, \cdots, X_m$ 是 Ω 上的光滑向量场, 使得对所有满足 $d(z, F) = |y-z|$ 的点 $y \in F$ 和 $z \in \mathbb{R}^n$, 有 $\langle X_j(y), y-z\rangle = 0$. 另外, 假设 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ 是一条光滑的路径, 满足 $\gamma(0) \in F$, 而且, 存在一些合适的光滑函数 $f_1, \cdots, f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$, 使得 $\gamma'(s) = \sum_{j=1}^{m} f_j(s)X_j(\gamma(s))$. 那么对所有的 $s \in [0,1]$, 有 $\gamma(s) \in F$.

证明 假设存在实数 $\sigma \in (0,1]$, 使得 $\gamma(\sigma) \notin F$. 我们定义一个实数序列 s_k (当 k 充分大时) 为

$$s_k = \sup\left\{s \in [0,\sigma] : d(\gamma(s), F) \leqslant e^{ks-k^2}\right\}.$$

易知, $s_k \in (0,\sigma)$, 而且当 k 充分大时, 有 $d(\gamma(s_k),F) = e^{ks_k-k^2} > 0$. 对每个 k, 存在一个点 $y_k \in \overline{F}$, 使得 $d(\gamma(s_k),F) = |y_k - \gamma(s_k)| > 0$. 那么

$$\lim_{k\to\infty} |y_k - \gamma(s_k)| = \lim_{k\to\infty} e^{ks_k-k^2} = 0.$$

从而, 当 k 充分大时, 有 $y_k \in \overline{F} \cap \Omega$. 因为 F 是相对闭集, 所以当 k 充分大时, 有 $y_k \in F$.

由 s_k 的定义, 对所有的 $s \in [s_k,\sigma]$, 我们有

$$e^{k(s_k-s)}|y_k - \gamma(s)| \geqslant e^{k(s_k-s)} d(\gamma(s),F) \geqslant d(\gamma(s_k),F) = |y_k - \gamma(s_k)|.$$

从而,

$$\begin{aligned}&k|y_k - \gamma(s_k)|^2 + \langle \gamma'(s_k), y_k - \gamma(s_k)\rangle \\ =& -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big(e^{2k(s_k-s)}|y_k - \gamma(s)|^2\Big)\Big|_{s=s_k} \leqslant 0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\sum_{j=1}^m f_j(s_k)\langle X_j(\gamma(s_k)), y_k - \gamma(s_k)\rangle \leqslant -k|y_k - \gamma(s_k)|^2.$$

由假设, 对 $j = 1,\cdots,m$, $\langle X_j(y_k), y_k - \gamma(s_k)\rangle = 0$. 结合这些事实, 可得

$$\sum_{j=1}^m f_j(s_k)\langle X_j(y_k) - X_j(\gamma(s_k)), y_k - \gamma(s_k)\rangle \geqslant k|y_k - \gamma(s_k)|^2.$$

这是不可能的, 因为函数 $f_1,\cdots,f_m$ 是有界的, 而向量场 $X_1,\cdots,X_m$ 是 Lipschitz 连续的. □

结合命题 9.5 和 9.6, 我们得到下面的结论:

推论 9.7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $X_1,\cdots,X_m$ 是 Ω 上的光滑向量场. 假设 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个非负的光滑函数, 满足

$$\sum_{j=1}^m (D^2\varphi)(X_j,X_j) \leqslant -L \inf_{|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi) + L|d\varphi| + L\varphi,$$

其中 L 是一个正常数. 记 $F = \{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\}$ 为函数 φ 的零点集. 另外, 假设 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ 是一条光滑的路径, 满足 $\gamma(0) \in F$, 而且, 存在一些合适的光滑函数 $f_1, \cdots, f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$, 使得

$$\gamma'(s) = \sum_{j=1}^{m} f_j(s) X_j(\gamma(s)).$$

那么对所有的 $s \in [0,1]$, 有 $\gamma(s) \in F$.

注意到, 如果 Ω 是一个黎曼流形的开子集, 那么推论 9.7 依然成立. 为证明这个结论, 我们将路径 γ 分成一些小曲线段, 每个小曲线段包含在一个单独的坐标卡内. 然后我们将推论 9.7 应用在这些小曲线段上.

9.4 具有非负 Ricci 曲率的三维流形

在这一节中, 我们将叙述 Hamilton 关于具有非负 Ricci 曲率的三维流形的分类定理. 为此目的, 我们对一个定义在单位正交标架丛上的函数运用推论 9.7.

首先, 我们介绍一些概念. 虽然我们只考虑这些概念在三维流形的情况, 但是这些概念在任意维数的流形上都是有意义的. 设 M 是一个 n 维紧致流形, $g(t)$, $t \in [0,T]$, 是 M 上的一族度量, 而且这族度量是 Ricci 流的解. 我们考虑一个 $n+1$ 维流形 $M \times (0,T)$. 像在第 2.3 节一样, 我们有一个自然的映射 $M \times (0,T) \to M, (p,t) \to p$, 记 E 是 M 上的切丛在这个映射下的拉回. 从 E 上赋予一个自然的丛度量. 并且, 其上有一个自然的联络 D, 见 (6). 由命题 2.13, 联络 D 和丛 E 上的丛度量是相容的.

设 $\mathscr{O}$ 是 E 上的单位正交标架丛, $\pi : \mathscr{O} \to M \times (0,T)$ 是对应的丛投影. 由定义, $\mathscr{O}$ 在一点 $(p,t) \in M \times (0,T)$ 上的纤维包含所有在度量 $g(t)$ 下单位正交的 n-标架 $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset E_{(p,t)}$. 注意到 $\mathscr{O}$ 是 $M \times (0,T)$ 上的 $\mathrm{O}(n)$-主丛.

对任意一个点 $\underline{e} \in \mathscr{O}$, 记 $\mathscr{V}_{\underline{e}} \subset T_{\underline{e}}\mathscr{O}$ 是点 $\underline{e}$ 处的纵空间. 也就是说, $\mathscr{V}_{\underline{e}}$ 是点 $\underline{e}$ 处纤维 $\pi^{-1}(\{\pi(\underline{e})\})$ 的切空间. 因为 $\mathscr{O}$ 是 $\mathrm{O}(n)$-主丛, 存在一个

从 Lie 代数 $\mathfrak{so}(n)$ 到纵空间 $\mathscr{V}_{\underline{e}}$ 的典型同构. 通过 $\mathfrak{so}(n)$ 上的标准内积, 我们可以得到 $\mathscr{V}_{\underline{e}}$ 上一个自然的内积.

对任意的点 $\underline{e} \in \mathscr{O}$, 记

$$\mathscr{H}_{\underline{e}} : T_{\pi(\underline{e})}(M \times (0,T)) \to T_{\underline{e}}\mathscr{O}$$

为由联络 D 所诱导的横向提升. 接下来我们定义一族 $\mathscr{O}$ 上光滑的横向量场 $\mathscr{X}_1, \cdots, \mathscr{X}_n, \mathscr{Y}$. 对每个 $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathscr{X}_j$ 在点 $\underline{e} = \{e_1, \cdots, e_n\} \in \mathscr{O}$ 处取值为向量 e_j 的横向提升:

$$\mathscr{X}_j|_{\underline{e}} = \mathscr{H}_{\underline{e}}(e_j) \in T_{\underline{e}}\mathscr{O}.$$

而且, $\mathscr{Y}$ 在点 $\underline{e} = \{e_1, \cdots, e_n\} \in \mathscr{O}$ 处取值为向量 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 的横向提升:

$$\mathscr{Y}|_{\underline{e}} = \mathscr{H}_{\underline{e}}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) \in T_{\underline{e}}\mathscr{O}.$$

易知, $T_{\underline{e}}\mathscr{O} = \mathscr{V}_{\underline{e}} \oplus \mathrm{span}\{\mathscr{X}_1, \cdots, \mathscr{X}_n, \mathscr{Y}\}$.

在本节的剩下部分, 我们只考虑 $n = 3$ 的情况. 对任意的单位正交标架 $\underline{e} = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_{(p,t)}$, 定义

$$\varphi(\underline{e}) = \mathrm{Ric}_{g(t)}(e_1, e_1). \tag{76}$$

从而我们定义了一个光滑函数 $\varphi : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$, 这个函数满足下述的微分方程.

引理 9.8 在任意一点 $\underline{e} = \{e_1, e_2, e_3\} \in \mathscr{O}$ 处,

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}(\varphi) - \sum_{j=1}^{3} \mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) &= \mathrm{Ric}(e_1, e_1)(\mathrm{Ric}(e_2, e_2) + \mathrm{Ric}(e_3, e_3)) \\ &\quad + (\mathrm{Ric}(e_2, e_2) - \mathrm{Ric}(e_3, e_3))^2 + 4\,\mathrm{Ric}(e_2, e_3)^2.\end{aligned}$$

证明 对 $j = 1, 2, 3$,

$$\mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) = (D^2_{e_j, e_j}\mathrm{Ric})(e_1, e_1).$$

对 j 求和, 可得

$$\sum_{j=1}^{3} \mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) = (\Delta \mathrm{Ric})(e_1, e_1).$$

而且,

$$\mathscr{Y}(\varphi) = (D_{\frac{\partial}{\partial t}} \mathrm{Ric})(e_1, e_1).$$

所以, 根据命题 2.15,

$$\mathscr{Y}(\varphi) - \sum_{j=1}^{3} \mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) = 2 \sum_{p,q=1}^{3} R(e_1, e_p, e_1, e_q)\mathrm{Ric}(e_p, e_q).$$

利用引理 6.1, 可得

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{p,q=1}^{3} R(e_1, e_p, e_1, e_q)\mathrm{Ric}(e_p, e_q) \\
={}& \mathrm{Ric}(e_1, e_1)(\mathrm{Ric}(e_2, e_2) + \mathrm{Ric}(e_3, e_3)) \\
&+(\mathrm{Ric}(e_2, e_2) - \mathrm{Ric}(e_3, e_3))^2 + 4\,\mathrm{Ric}(e_2, e_3)^2.
\end{aligned}$$

结合这些事实, 可知结论成立. □

命题 9.9 设 M 是一个紧致的三维流形, $g(t), t \in [0, T]$, 是 M 上具有非负 Ricci 曲率的 Ricci 流的解. 固定一个时间 $\tau \in (0, T)$. 那么所有满足 $\mathrm{Ric}_{g(\tau)}(v, v) = 0$ 的向量 $v \in T_pM$ 所构成的集合是平移不变的.

证明 设 $\gamma : [0, 1] \to M$ 是一条光滑路径, $\{v_1(s), v_2(s), v_3(s)\} \subset E_{(\gamma(s),\tau)}$ 是在度量 $g(\tau)$ 下沿 γ 的平行移动单位正交标架. 我们定义一个光滑的路径 $\underline{v} : [0, 1] \to \mathscr{O}$ 为

$$\underline{v}(s) = \{v_1(s), v_2(s), v_3(s)\}.$$

显然, 对所有的 $s \in [0, 1], \pi(\underline{v}(s)) = (\gamma(s), \tau)$, 而且 $\underline{v}'(s) = \mathscr{H}_{\underline{v}(s)}(\gamma'(s))$. 同时, 存在光滑函数 $f_1, f_2, f_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, 使得

$$\gamma'(s) = \sum_{j=1}^{3} f_j(s)v_j(s).$$

这意味着

$$\underline{v}'(s) = \mathscr{H}_{\underline{v}(s)}(\gamma'(s)) = \sum_{j=1}^{3} f_j(s)\mathscr{H}_{\underline{v}(s)}(v_j(s)) = \sum_{j=1}^{3} f_j(s)\mathscr{X}_j|_{\underline{v}(s)}.$$

接下来, 我们考虑由 (76) 定义的函数 $\varphi : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$. 由于 $(M, g(t))$ 对所有的 $t \in [0,1]$ 具有非负的 Ricci 曲率, 函数 φ 是非负的. 为简单起见, 记函数 φ 的零点集为 $\mathscr{F} = \{\underline{e} \in \mathscr{O} : \varphi(\underline{e}) = 0\}$. 利用引理 9.8, 可知对任意的 $\underline{e} \in \mathscr{O}$, 有

$$\mathscr{Y}(\varphi) - \sum_{j=1}^{3} \mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) \geqslant 0.$$

假设 $\mathrm{Ric}_{g(\tau)}(v_1(0), v_1(0)) = 0$. 那么, $\underline{v}(0) \in \mathscr{F}$. 所以, 由推论 9.7, 对所有的 $s \in [0,1]$, 有 $\underline{v}(s) \in \mathscr{F}$. 因此, $\mathrm{Ric}_{g(\tau)}(v_1(s), v_1(s)) = 0$ 恒成立. □

定理 9.10 (R. Hamilton [45]) 设 M 是一个紧致的三维流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量, 具有非负 Ricci 曲率. 假设 $g(t), t \in [0,T)$, 是以 g_0 为初值的 Ricci 流唯一的最大解. 如果 (M, g_0) 是局部不可约的, 那么, 度量 $\dfrac{1}{4(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于一具有常截面曲率 1 的度量.

证明 由假设, (M, g_0) 是局部不可约的. 所以, 存在一个实数 $\tau \in (0,T)$, 使得 $(M, g(\tau))$ 是局部不可约的. 对任意点 $p \in M$, 考虑集合

$$\{v \in T_pM : \mathrm{Ric}_{g(\tau)}(v,v) = 0\}.$$

由命题 9.9, 这个集合是 TM 的平移不变的子丛. 因为 $(M, g(\tau))$ 是局部不可约的, 这个子丛的秩一定是 0 或 3. 我们分成两种情形来讨论:

情形 1: 假设对所有的 $p \in M$,

$$\{v \in T_pM : \mathrm{Ric}_{g(\tau)}(v,v) = 0\} = \{0\}.$$

在这种情形下, $(M, g(\tau))$ 具有正的 Ricci 曲率. 从而, 由定理 6.8, 度量 $\dfrac{1}{4(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 意义下收敛于具有常截面曲率 1 的度量.

情形 2: 假设对所有的 $p \in M$,

$$\{v \in T_pM : \mathrm{Ric}_{g(\tau)}(v,v) = 0\} = T_pM.$$

在这种情形下, $(M,g(\tau))$ 是 Ricci 平坦的. 因为 M 是三维的, 所以 $(M,g(\tau))$ 是平坦的. 这与 $(M,g(\tau))$ 是局部不可约的这个假设相矛盾. □

9.5 具有非负迷向曲率的流形

我们接着考虑高维流形的情形. 设 M 是一个维数 $n\geqslant 4$ 的紧致流形, $g(t),t\in[0,T]$, 是 Ricci 流的解. 像上节一样, 记 $\mathscr{O}$ 是 E 上的单位正交标架丛. 对任意一个单位正交标架 $\underline{e}=\{e_1,\cdots,e_n\}\subset E_{(p,t)}$, 定义

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{e}) &= R_{g(t)}(e_1,e_3,e_1,e_3)+R_{g(t)}(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&\quad+R_{g(t)}(e_2,e_3,e_2,e_3)+R_{g(t)}(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&\quad-2R_{g(t)}(e_1,e_2,e_3,e_4),\end{aligned}\tag{77}$$

其中 $R_{g(t)}$ 是发展的度量 $g(t)$ 的黎曼曲率张量. 这定义了一个光滑的函数 $\varphi\colon\mathscr{O}\to\mathbb{R}$.

引理 9.11 在任意一点 $\underline{e}=\{e_1,\cdots,e_n\}\in\mathscr{O}$ 处,

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}(\varphi)-\sum_{j=1}^n\mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) &= Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&\quad+Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3)+Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&\quad-2Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4).\end{aligned}$$

证明 对 $j=1,\cdots,n$,

$$\begin{aligned}\mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) &= (D^2_{e_j,e_j}R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+(D^2_{e_j,e_j}R)(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&\quad+(D^2_{e_j,e_j}R)(e_2,e_3,e_2,e_3)+(D^2_{e_j,e_j}R)(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&\quad-2(D^2_{e_j,e_j}R)(e_1,e_2,e_3,e_4).\end{aligned}$$

对 j 求和, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi)) &= (\Delta R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+(\Delta R)(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&\quad+(\Delta R)(e_2,e_3,e_2,e_3)+(\Delta R)(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&\quad-2(\Delta R)(e_1,e_2,e_3,e_4).\end{aligned}$$

而且,

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}(\varphi)=&(D_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+(D_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&+(D_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(e_2,e_3,e_2,e_3)+(D_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&-2(D_{\frac{\partial}{\partial t}}R)(e_1,e_2,e_3,e_4).\end{aligned}$$

另一方面, 由命题 2.14, $D_{\frac{\partial}{\partial t}}R = \Delta R + Q(R)$. 结合这些事实, 可知结论成立. □

引理 9.12　在任意一点 $\underline{e}=\{e_1,\cdots,e_n\}\in\mathscr{O}$ 处,

$$\begin{aligned}&Q(R)(e_1,e_3,e_1,e_3)+Q(R)(e_1,e_4,e_1,e_4)\\&+Q(R)(e_2,e_3,e_2,e_3)+Q(R)(e_2,e_4,e_2,e_4)\\&-2Q(R)(e_1,e_2,e_3,e_4)\\ \geqslant& L\inf_{\xi\in\mathscr{V}_{\underline{e}},|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi)-L\sup_{\xi\in\mathscr{V}_{\underline{e}},|\xi|\leqslant 1}d\varphi(\xi)-L|\varphi|.\end{aligned}$$

其中, $\mathscr{V}_{\underline{e}}$ 是点 $\underline{e}$ 处的纵空间, L 是一个正常数.

证明　我们改写第 7.3 节的一些结论. 与引理 7.9 的证明中一样的讨论, 我们可以得到

$$\begin{aligned}&\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=1}^{4}R_{12pq}R_{34pq}\\&-\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\&-\sum_{p,q=1}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})\\ \geqslant& -L_1\sup_{\xi\in\mathscr{V}_{\underline{e}},|\xi|\leqslant 1}d\varphi(\xi)-L_1|\varphi|,\end{aligned}$$

其中 L_1 是某个正的常数. 通过改写引理 7.11 的证明, 我们可以得到, 存

在某个正的常数 L_2, 使得对任意的 $q \in \{5, \cdots, n\}$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{4}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p=1}^{4}R_{12pq}R_{34pq}\\
&-\sum_{p=1}^{4}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\
&-\sum_{p=1}^{4}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})\\
\geqslant& -L_2 \sup_{\xi\in\mathscr{V}_{\mathbb{C}},|\xi|\leqslant 1} d\varphi(\xi).
\end{aligned}$$

最后, 利用引理 7.13 证明过程中的讨论, 我们知道, 存在某个正的常数 L_3, 使得

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-\sum_{p,q=5}^{n}R_{12pq}R_{34pq}\\
&-\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\
&-\sum_{p,q=5}^{n}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})\\
\geqslant& L_3 \inf_{\xi\in\mathscr{V}_{\mathbb{C}},|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi)-L_3|\varphi|.
\end{aligned}$$

结合这些结论, 可知存在某个正的常数 L, 使得

$$\begin{aligned}
&(R^\sharp)_{1313}+(R^\sharp)_{1414}+(R^\sharp)_{2323}+(R^\sharp)_{2424}+2(R^\sharp)_{1342}+2(R^\sharp)_{1423}\\
=&2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p1q}+R_{2p2q})(R_{3p3q}+R_{4p4q})-2\sum_{p,q=1}^{n}R_{12pq}R_{34pq}\\
&-2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p3q}+R_{2p4q})(R_{3p1q}+R_{4p2q})\\
&-2\sum_{p,q=1}^{n}(R_{1p4q}-R_{2p3q})(R_{4p1q}-R_{3p2q})\\
\geqslant& L\inf_{\xi\in\mathscr{V}_{\mathbb{C}},|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi)-L\sup_{\xi\in\mathscr{V}_{\mathbb{C}},|\xi|\leqslant 1}d\varphi(\xi)-L|\varphi|.
\end{aligned}\tag{78}$$

同时,

$$(R^2)_{1313}+(R^2)_{1414}+(R^2)_{2323}+(R^2)_{2424}+2(R^2)_{1342}+2(R^2)_{1423}\geqslant 0.\tag{79}$$

把 (78) 和 (79) 加起来, 可得

$$
\begin{aligned}
& Q(R)_{1313}+Q(R)_{1414}+Q(R)_{2323}+Q(R)_{2424}+2Q(R)_{1342}+2Q(R)_{1423} \\
\geqslant\ & L \inf_{\xi\in\mathscr{V}_{\underline{e}},|\xi|\leqslant 1}(D^2\varphi)(\xi,\xi)-L\sup_{\xi\in\mathscr{V}_{\underline{e}},|\xi|\leqslant 1} d\varphi(\xi)-L|\varphi|.
\end{aligned}
$$

由于 $Q(R)$ 满足第一 Bianchi 恒等式, 所以结论成立. □

引理 9.13 (S. Brendle, R. Schoen [21]) 设 M 是一个维数 $n\geqslant 4$ 的紧致流形, $g(t), t\in[0,T]$, 是 M 上具有非负迷向曲率的 Ricci 流的解. 固定一个时间 $\tau\in(0,T)$. 那么所有关于 $g(\tau)$ 单位正交的 4-标架 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 所构成的集合是平移不变的, 并且满足

$$
\begin{aligned}
& R_{g(\tau)}(e_1,e_3,e_1,e_3)+R_{g(\tau)}(e_1,e_4,e_1,e_4) \\
& +R_{g(\tau)}(e_2,e_3,e_2,e_3)+R_{g(\tau)}(e_2,e_4,e_2,e_4) \\
& -2R_{g(\tau)}(e_1,e_2,e_3,e_4)=0.
\end{aligned}
$$

证明 设 $\gamma:[0,1]\to M$ 是一条光滑路径, $\{v_1(s),\cdots,v_n(s)\}\subset E_{(\gamma(s),\tau)}$ 是在度量 $g(\tau)$ 下沿 γ 的平行移动单位正交标架. 我们定义一条光滑的路径 $\underline{v}:[0,1]\to\mathscr{O}$ 为

$$
\underline{v}(s)=\{v_1(s),\cdots,v_n(s)\}.
$$

显然, 对所有的 $s\in[0,1]$, $\pi(\underline{v}(s))=(\gamma(s),\tau)$, 而且 $\underline{v}'(s)=\mathscr{H}_{\underline{v}(s)}(\gamma'(s))$. 同时, 存在光滑函数 $f_1,\cdots,f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, 使得 $\gamma'(s)=\sum_{j=1}^n f_j(s)v_j(s)$. 这意味着

$$
\underline{v}'(s)=\mathscr{H}_{\underline{v}(s)}(\gamma'(s))=\sum_{j=1}^n f_j(s)\mathscr{H}_{\underline{v}(s)}(v_j(s))=\sum_{j=1}^n f_j(s)\mathscr{X}_j\Big|_{\underline{v}(s)}.
$$

接下来, 我们考虑由 (77) 定义的函数 $\varphi:\mathscr{O}\to\mathbb{R}$. 由于 $(M,g(t))$ 对所有的 $t\in[0,T]$ 具有非负的迷向曲率, 函数 φ 是非负的. 为简单起见, 记函数 φ 的零点集为 $\mathscr{F}=\{\underline{e}\in\mathscr{O}:\varphi(\underline{e})=0\}$. 利用引理 9.11 和 9.12, 可

知存在一个正常数 L, 使得在任意的点 $\underline{e} \in \mathcal{O}$ 处, 有

$$\begin{aligned}&\mathscr{Y}(\varphi) - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{X}_j(\mathscr{X}_j(\varphi))\\ \geqslant\ & L \inf_{\xi \in \mathscr{V}_{\underline{e}}, |\xi| \leqslant 1} (D^2\varphi)(\xi, \xi) - L \sup_{\xi \in \mathscr{V}_{\underline{e}}, |\xi| \leqslant 1} d\varphi(\xi) - L|\varphi|.\end{aligned}$$

假设

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(v_1(0), v_3(0), v_1(0), v_3(0)) + R_{g(\tau)}(v_1(0), v_4(0), v_1(0), v_4(0))\\ &+R_{g(\tau)}(v_2(0), v_3(0), v_2(0), v_3(0)) + R_{g(\tau)}(v_2(0), v_4(0), v_2(0), v_4(0))\\ &-2R_{g(\tau)}(v_1(0), v_2(0), v_3(0), v_4(0)) = 0.\end{aligned}$$

那么, $\underline{v}(0) \in \mathscr{F}$. 所以, 由推论 9.7, 对所有的 $s \in [0, 1]$, 有 $\underline{v}(s) \in \mathscr{F}$. 因此,

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(v_1(s), v_3(s), v_1(s), v_3(s)) + R_{g(\tau)}(v_1(s), v_4(s), v_1(s), v_4(s))\\ &+R_{g(\tau)}(v_2(s), v_3(s), v_2(s), v_3(s)) + R_{g(\tau)}(v_2(s), v_4(s), v_2(s), v_4(s))\\ &-2R_{g(\tau)}(v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)) = 0\end{aligned}$$

恒成立. □

推论 9.14 设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致单连通流形, $g(t), t \in [0, T]$, 是 M 上具有非负迷向曲率的 Ricci 流的解. 若存在某个时间 $\tau \in (0, T)$, 使得 $\mathrm{Hol}(M, g(\tau)) = \mathrm{SO}(n)$. 那么所有的单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 都满足

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4)\\ &+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4)\\ &-2R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) > 0.\end{aligned}$$

证明 我们用反证法. 假设存在某个点 $p \in M$ 和某个单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$, 使得

$$R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4)$$

$$+R_{g(\tau)}(e_2,e_3,e_2,e_3)+R_{g(\tau)}(e_2,e_4,e_2,e_4)$$
$$-2R_{g(\tau)}(e_1,e_2,e_3,e_4)=0.$$

断言: 对所有的点 $q\in M$ 和所有的单位正交的 4-标架 $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\subset T_qM$, 有

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_1,v_3)+R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_1,v_4)\\&+R_{g(\tau)}(v_2,v_3,v_2,v_3)+R_{g(\tau)}(v_2,v_4,v_2,v_4)\\&-2R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_3,v_4)=0.\end{aligned}\tag{80}$$

由于 $\mathrm{Hol}(M,g(\tau))=\mathrm{SO}(n)$, 存在一条分段光滑的路径 $\gamma:[0,1]\to M$, 使得 $\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$, 并且

$$v_1=P_\gamma e_1,\quad v_2=P_\gamma e_2,\quad v_3=P_\gamma e_3,\quad v_4=\pm P_\gamma e_4,$$

其中 P_γ 是 γ 上关于度量 $g(\tau)$ 的平行移动. 如果 $v_4=P_\gamma e_4$, 那么由定理 9.13 知等式 (80) 成立. 所以, 我们只需证明 $v_4=-P_\gamma e_4$ 的情形. 利用定理 9.13, 可得

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_1,v_3)+R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_1,v_4)\\&+R_{g(\tau)}(v_2,v_3,v_2,v_3)+R_{g(\tau)}(v_2,v_4,v_2,v_4)\\&+2R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_3,v_4)=0.\end{aligned}\tag{81}$$

同时, 定理 9.13 意味着

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_1,v_4)+R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_1,v_2)\\&+R_{g(\tau)}(v_3,v_4,v_3,v_4)+R_{g(\tau)}(v_3,v_2,v_3,v_2)\\&+2R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_4,v_2)=0\end{aligned}\tag{82}$$

和

$$\begin{aligned}&R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_1,v_2)+R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_1,v_3)\\&+R_{g(\tau)}(v_4,v_2,v_4,v_2)+R_{g(\tau)}(v_4,v_3,v_4,v_3)\\&+2R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_2,v_3)=0.\end{aligned}\tag{83}$$

由等式 (81)—(83), 可知

$$R_{g(\tau)}(v_1, v_2, v_3, v_4) \leqslant 0,$$

$$R_{g(\tau)}(v_1, v_3, v_4, v_2) \leqslant 0,$$

$$R_{g(\tau)}(v_1, v_4, v_2, v_3) \leqslant 0.$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 我们得到 $R_{g(\tau)}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$. 所以, 由等式 (81) 知等式 (80) 成立. 从而我们完成 (80) 的证明.

由命题 7.3, 对所有的 $t \in [0, T]$, 流形 $(M, g(t))$ 具有非负的数量曲率. 另一方面, 等式 (80) 意味着 $(M, g(t))$ 的数量曲率为 0. (为证明这一点, 我们对 $-R_{g(\tau)}$ 应用命题 7.3) 利用命题 2.18, 可得 $(M, g(t))$ 是 Ricci 平坦的. 所以, 根据命题 7.3 知 $(M, g(t))$ 是平坦的. 矛盾. □

9.6 Kähler-Einstein 和四元 Kähler 流形

9.6.1 具有非负迷向曲率的 Kähler-Einstein 流形

在本节中, 我们总假设 (M, g) 是一个维数 $2m \geqslant 4$ 的紧致单连通黎曼流形, 其和乐群 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{U}(m)$. 那么 (M, g) 是一个 Kähler 流形. 从而, 存在自同构丛 $\mathrm{End}(TM)$ 的一个截面 J, 满足下面性质:

- J 是平行的.
- 对任意的点 $p \in M$, 有 $J^2 = -\mathrm{id}$, 并且对所有的向量 $X, Y \in T_pM$, 有 $g(X, Y) = g(JX, JY)$.

由于 J 是平行的, (M, g) 的曲率张量满足: 对所有的向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$, 有

$$R(X, Y, Z, W) = R(X, Y, JZ, JW). \tag{84}$$

命题 9.15 固定一个点 $p \in M$, 设 $\{e_1, \cdots, e_{2m}\}$ 是 T_pM 的一组单位正交基. 那么, 对所有的单位向量 $X \in T_pM$, 有

$$Q(R)(X, JX, X, JX) \leqslant -2R(X, JX, X, JX)^2 + 2\sum_{p,q=1}^{2m} R(X, JX, e_p, e_q)^2.$$

证明　由 $Q(R)$ 的定义,

$$\begin{aligned}Q(R)(X,JX,X,JX)=&\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,JX,e_p,e_q)^2\\&+2\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,e_p,X,e_q)R(JX,e_p,JX,e_q)\\&-2\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,e_p,JX,e_q)R(JX,e_p,X,e_q).\end{aligned}$$

从而, 我们知道

$$\begin{aligned}Q(R)(X,JX,X,JX)=&\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,JX,e_p,e_q)^2\\&-4\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,e_p,JX,e_q)R(JX,e_p,X,e_q).\end{aligned}$$

右边项的展开式不依赖于单位正交基 $\{e_1,\cdots,e_{2m}\}$ 的选择. 不失一般性, 我们假设 $e_1=X, e_2=JX$. 从而

$$\begin{aligned}&-4\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,e_p,JX,e_q)R(JX,e_p,X,e_q)\\&=-4\sum_{p,q=3}^{2m}R(X,e_p,JX,e_q)R(JX,e_p,X,e_q)\\&\leqslant\sum_{p,q=3}^{2m}(R(X,e_p,JX,e_q)-R(JX,e_p,X,e_q))^2\\&=\sum_{p,q=3}^{2m}R(X,JX,e_p,e_q)^2\\&\leqslant-2R(X,JX,X,JX)^2+\sum_{p,q=1}^{2m}R(X,JX,e_p,e_q)^2.\end{aligned}$$

结合以上事实, 可得结论成立. □

引理 9.16　假设 $X\in T_pM$ 是一个单位向量, 满足 $R(X,JX,X,JX)$ 是最大的. 我们还假设 $Y\in T_pM$ 也是一个单位向量, 满足 $g(X,Y)=$

$g(JX, Y) = 0$. 那么

$$R(X, JX, X, Y) = R(X, JX, X, JY) = 0,$$
$$2R(X, JX, Y, JY) \leqslant R(X, JX, X, JX).$$

证明 考虑单位向量 $\cos(s)X + \sin(s)Y$. 因为 $R(X, JX, X, JX)$ 是最大的, 从而对所有的 $s \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
&\cos^4(s)R(X, JX, X, JX) + \sin^4(s)R(Y, JY, Y, JY) \\
&+4\cos^3(s)\sin(s)R(X, JX, X, JY) + 4\cos(s)\sin^3(s)R(X, JY, Y, JY) \\
&+2\cos^2(s)\sin^2(s)[R(X, JX, Y, JY) + 2R(X, JY, X, JY)] \\
\leqslant\, & R(X, JX, X, JX),
\end{aligned}$$

其中, 当 $s = 0$ 时等号成立. 这意味着

$$R(X, JX, X, JY) = 0,$$

并且,

$$2R(X, JY, X, JY) \leqslant R(X, JX, X, JX) - R(X, JX, Y, JY). \tag{85}$$

用 JY 代替 Y, 同理可得

$$R(X, JX, X, Y) = 0$$

和

$$2R(X, Y, X, Y) \leqslant R(X, JX, X, JX) - R(X, JX, Y, JY). \tag{86}$$

取 (85) 和 (86) 的算术平均, 可得

$$\begin{aligned}
R(X, JX, Y, JY) &= R(X, Y, X, Y) + R(X, JY, X, JY) \\
&\leqslant R(X, JX, X, JX) - R(X, JX, Y, JY).
\end{aligned}$$

从而, 结论成立. □

下述的结论是由 S. Goldberg 和 S. Kobayashi (见 [37], 定理 5) 给出的.

定理 9.17 (S. Goldberg, S. Kobayashi [37]) 假设 (M,g) 是一个 Kähler-Einstein 流形. 并且, 假设 (M,g) 具有正的正交全纯双截面曲率; 也就是说, 对所有的点 $p \in M$ 和所有满足 $g(X,Y) = g(JX,Y) = 0$ 的单位向量 $X, Y \in T_pM$, 有

$$R(X, JX, Y, JY) > 0.$$

那么, (M,g) 的全纯截面曲率恒为常数.

证明 根据假设, 存在常数 κ, 使得 $\mathrm{Ric}_g = \frac{1}{2}(m+1)\kappa g$. 利用命题 2.11, 可得

$$\Delta R + Q(R) = (m+1)\kappa R.$$

接下来, 我们选择一个点 $p \in M$ 和一个单位向量 $X \in T_pM$, 使得 $R(X, JX, X, JX)$ 是最大的. 这意味着, 对所有的向量 $v \in T_pM$, 有

$$(D^2_{v,v}R)(X, JX, X, JX) \leqslant 0.$$

对 v 取迹, 可得

$$(\Delta R)(X, JX, X, JX) \leqslant 0.$$

结合上述事实, 可得

$$Q(R)(X, JX, X, JX) \geqslant (m+1)\kappa R(X, JX, X, JX). \tag{87}$$

下面, 我们分析这一项 $Q(R)(X, JX, X, JX)$. 为简单起见, 记 $w_1 = X$. 那么存在向量 $w_2, \cdots, w_m \in T_pM$, 使得 $\{w_1, Jw_1, w_2, Jw_2, \cdots, w_m, Jw_m\}$ 构成 T_pM 的一组单位正交基, 并且, 对 $2 \leqslant \alpha < \beta \leqslant m$, 有

$$R(X, JX, w_\alpha, w_\beta) = R(X, JX, w_\alpha, Jw_\beta) = 0.$$

由引理 9.16, 对 $2 \leqslant \beta \leqslant m$, 有

$$R(X, JX, X, w_\beta) = R(X, JX, X, Jw_\beta) = 0.$$

结合这些事实, 可知对 $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant m$, 有

$$R(X, JX, w_\alpha, w_\beta) = R(X, JX, w_\alpha, Jw_\beta) = 0. \tag{88}$$

由命题 9.15, 有

$$\begin{aligned}Q(R)(X,JX,X,JX) \leqslant -2R(X,JX,X,JX)^2 \\ +4\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} R(X,JX,w_\alpha,w_\beta)^2 \\ +4\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} R(X,JX,w_\alpha,Jw_\beta)^2.\end{aligned}$$

利用 (88), 上述不等式可以改写为

$$\begin{aligned}Q(R)(X,JX,X,JX) \leqslant -2R(X,JX,X,JX)^2 \\ +4\sum_{\alpha=1}^{m} R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha)^2.\end{aligned} \tag{89}$$

结合 (87) 和 (89), 可得

$$\begin{aligned}&2\sum_{\alpha=2}^{m} R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha)R(X,JX,X,JX) \\ &= 2\mathrm{Ric}(X,X)R(X,JX,X,JX) - 2R(X,JX,X,JX)^2 \\ &= (m+1)\kappa R(X,JX,X,JX) - 2R(X,JX,X,JX)^2 \\ &\leqslant Q(R)R(X,JX,X,JX) - 2R(X,JX,X,JX)^2 \\ &\leqslant 4\sum_{\alpha=2}^{m} R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha)^2.\end{aligned} \tag{90}$$

由于 (M,g) 具有正的正交全纯双截面曲率, 所以对 $2\leqslant\alpha\leqslant m$, 有

$$R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha) > 0.$$

并且, 根据引理 9.16,

$$2R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha) \leqslant R(X,JX,X,JX).$$

利用 (90), 可以得到

$$2R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha) = R(X,JX,X,JX).$$

这意味着

$$\mathrm{Ric}(X,X)=\sum_{\alpha=1}^{m}R(X,JX,w_\alpha,Jw_\alpha)=\frac{1}{2}(m+1)R(X,JX,X,JX).$$

利用等式 $\mathrm{Ric}_g=\frac{1}{2}(m+1)\kappa g$, 可得 $R(X,JX,X,JX)=\kappa$. 所以, (M,g) 的全纯截面曲率有上界 κ. 因为 $\mathrm{Ric}_g=\frac{1}{2}(m+1)\kappa g$, 我们知道 (M,g) 的全纯截面曲率为常数 κ. □

命题 9.18 假设 (M,g) 是一个 Kähler-Einstein 流形. 并且, 假设 (M,g) 具有非负的迷向曲率, 那么, (M,g) 具有正的正交全纯双截面曲率.

证明 考虑两个单位向量 $X,Y\in T_pM$, 满足 $g(X,Y)=g(JX,Y)=0$. 那么

$$\begin{aligned}&R(X,Y,X,Y)+R(X,JY,X,JY)\\&+R(JX,Y,JX,Y)+R(JX,JY,JX,JY)\\=&2R(X,JX,Y,JY).\end{aligned}$$

由于 (M,g) 具有非负的迷向曲率, 所以

$$R(X,JX,Y,JY)\geqslant 0.$$

接下来我们只需证 $R(X,JX,Y,JY)\neq 0$. 为证明这一点, 我们用反证法. 假设 $R(X,JX,Y,JY)=0$. 这意味着 4-标架 $\{X,JX,Y,-JY\}$ 具有零迷向曲率. 固定一个点 $q\in M$ 和两个单位向量 $Z,W\in T_qM$, 满足 $g(Z,W)=g(JZ,W)=0$. 断言:

$$R(Z,JZ,W,JW)=0. \tag{91}$$

由于 $\mathrm{Hol}(M,g)=\mathrm{U}(m)$, 存在一条分段光滑的路径 $\gamma:[0,1]\to M$, 使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$, $P_\gamma X=Z$ 和 $P_\gamma Y=W$. 由定理 9.13, 4-标架 $\{P_\gamma X,P_\gamma JX,P_\gamma Y,-P_\gamma JY\}$ 具有零迷向曲率. 从而, 4-标架 $\{Z,JZ,W,-JW\}$ 具有零迷向曲率. 所以, $R(Z,JZ,W,JW)=0$, 断言证毕.

接下来, 我们对向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(Z+W)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(Z-W)$ 应用等式 (91). 可得

$$\begin{aligned}0 &= R(Z+W, JZ+JW, Z-W, JZ-JW)\\ &= R(Z, JZ, Z, JZ) + R(W, JW, W, JW)\\ &\quad +2R(Z, JZ, W, JW) - 4R(Z, JW, Z, JW).\end{aligned} \tag{92}$$

同样地, 如果我们对向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(Z+JW)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(Z-JW)$ 应用等式 (91). 可得

$$\begin{aligned}0 &= R(Z+JW, JZ-W, Z-JW, JZ+W)\\ &= R(Z, JZ, Z, JZ) + R(W, JW, W, JW)\\ &\quad +2R(Z, JZ, W, JW) - 4R(Z, W, Z, W).\end{aligned} \tag{93}$$

现在, 取 (92) 和 (93) 的算术平均. 这意味着对任意两个满足 $g(Z,W) = g(JZ,W) = 0$ 的单位向量 $Z, W \in T_qM$, 有

$$R(Z, JZ, Z, JZ) + R(W, JW, W, JW) = 0. \tag{94}$$

从而根据 (91) 和 (94), (M,g) 的数量曲率为零. 因此, (M,g) 是 Ricci 平坦的. 由于 (M,g) 具有非负的迷向曲率, 由命题 7.3 知 (M,g) 是平坦的. 矛盾. □

推论 9.19 假设 (M,g) 是一个 Kähler-Einstein 流形. 如果 (M,g) 具有非负的迷向曲率, 那么, (M,g) 具有常全纯双截面曲率.

9.6.2 具有非负迷向曲率的四元 Kähler 流形

在本节中, 我们总假设 (M,g) 是一个维数 $4m \geqslant 8$ 的紧致单连通黎曼流形, 其和乐群 $\mathrm{Hol}(M,g) = \mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$. 那么 (M,g) 是一个四元 Kähler 流形. 从而, 存在一个秩为 3 的子丛 $\mathscr{G} \subset \mathrm{End}(TM)$, 满足下面性质:

- $\mathscr{G}$ 是平移不变的.

• 对任意的点 $p \in M$, 有线性变换 $I, J, K \in \mathscr{G}_p$, 使得 $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathrm{id}$, 并且对所有的向量 $X, Y \in T_pM$, 有 $g(X, Y) = g(IX, IY) = g(JX, JY) = g(KX, KY)$.

易见, I, J, K 是线性无关的. 由于 $\mathscr{G}_p \subset \mathrm{End}(T_pM)$ 是一个三维向量空间, 我们可以记

$$\mathscr{G}_p = \{aI + bJ + cK : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

我们还记 $\mathscr{J}_p \subset \mathscr{G}_p$ 为以原点为圆心、以 $\sqrt{4m}$ 为半径的圆; 也就是说,

$$\mathscr{J}_p = \{aI + bJ + cK : a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

四元 Kähler 流形的一个最简单的例子是四元投影空间 $\mathbb{HP}^m$. $\mathbb{HP}^m$ 的曲率张量是

$$\begin{aligned}
&4R_0(X, Y, Z, W) \\
=\ & g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) \\
&+2g(IX, Y)g(IZ, W) + g(IX, Z)g(IY, W) - g(IX, W)(IY, Z) \\
&+2g(JX, Y)g(JZ, W) + g(JX, Z)g(JY, W) - g(JX, W)(JY, Z) \\
&+2g(KX, Y)g(KZ, W) + g(KX, Z)g(KY, W) - g(KX, W)(KY, Z)
\end{aligned}$$

(见 [13], 等式 (14.44)).

对一个一般的四元 Kähler 流形 (M, g), 我们有下述的结论:

命题 9.20 (D. Alekseevskii [1], S. Salamon [74]) (M, g) 的曲率张量能写成这种形式: $R = R_1 + \kappa R_0$, 其中 κ 是某个常数. 式子中 $R_0 \in \mathscr{C}_B(T_pM)$ 由上述公式给出, 而 $R_1 \in \mathscr{C}_B(T_pM)$ 是一个代数曲率张量, 满足: 对所有的向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$, 有

$$\begin{aligned}
R_1(X, Y, Z, W) &= R_1(X, Y, IZ, IW) \\
&= R_1(X, Y, JZ, JW) \\
&= R_1(X, Y, KZ, KW).
\end{aligned} \tag{95}$$

接下来, 我们要证明: $Q(R) = Q(R_1) + \kappa^2 Q(R_0)$. 给定一个代数曲率张量 $S \in \mathscr{C}_B(T_pM)$, 我们定义

$$
\begin{aligned}
&B(R_1, S)(X, Y, Z, W) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{4m} [R_1(X, Y, e_p, e_q)S(Z, W, e_p, e_q) + R_1(Z, W, e_p, e_q)S(X, Y, e_p, e_q)] \\
&\quad + \sum_{p,q=1}^{4m} [R_1(X, e_p, Z, e_q)S(Y, e_p, W, e_q) + R_1(Y, e_p, W, e_q)S(X, e_p, Z, e_q)] \\
&\quad - \sum_{p,q=1}^{4m} [R_1(X, e_p, W, e_q)S(Y, e_p, Z, e_q) + R_1(Y, e_p, Z, e_q)S(X, e_p, W, e_q)],
\end{aligned}
$$

其中, 向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$, $\{e_1, \cdots, e_{4m}\}$ 是 T_pM 的一组任意的单位正交基.

引理 9.21 固定一个点 $p \in M$. 我们定义一个代数曲率张量 $S \in \mathscr{C}_B(T_pM)$ 为

$$S(X, Y, Z, W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z),$$

其中, 向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$. 那么 $B(R_1, S) = 0$.

证明 设 $\{e_1, \cdots, e_{4m}\}$ 是 T_pM 的一组单位正交基. 根据 (95), R_1 的 Ricci 张量为零. 所以, 对所有的向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{4m} R_1(X, Y, e_p, e_q)S(Z, W, e_p, e_q) &= 2R_1(X, Y, Z, W), \\
\sum_{p,q=1}^{4m} R_1(X, e_p, Z, e_q)S(Y, e_p, W, e_q) &= -R_1(X, W, Z, Y).
\end{aligned}
$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 可得

$$
\begin{aligned}
B(R_1, S)(X, Y, Z, W) &= R_1(X, Y, Z, W) + R_1(Z, W, X, Y) \\
&\quad - R_1(X, W, Z, Y) - R_1(Y, Z, W, X) \\
&\quad + R_1(X, Z, W, Y) + R_1(Y, W, Z, X) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

引理 9.22　固定一个点 $p \in M$ 和一个近复结构 $J \in \mathscr{J}$. 我们定义一个代数曲率张量 $S \in \mathscr{C}_B(T_pM)$ 为

$$
\begin{aligned}
S(X,Y,Z,W) = {} & 2g(JX,Y)g(JZ,W) \\
& + g(JX,Z)g(JY,W) - g(JX,W)g(JY,Z),
\end{aligned}
$$

其中, 向量 $X,Y,Z,W \in T_pM$. 那么 $B(R_1,S) = 0$.

证明　设 $\{e_1,\cdots,e_{4m}\}$ 是 T_pM 的一组单位正交基. 根据 (95), 可知对所有的向量 $X,Y,Z,W \in T_pM$, 有

$$
\sum_{p,q=1}^{4m} R_1(X,Y,e_p,e_q)S(Z,W,e_p,e_q) = 2R_1(X,Y,Z,W)
$$

和

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p,q=1}^{4m} R_1(X,e_p,Z,e_q)S(Y,e_p,W,e_q) \\
& = 2R_1(X,JY,Z,JW) + R_1(X,JW,Z,JY).
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
B(R_1,S)(X,Y,Z,W) = {} & R_1(X,Y,Z,W) + R_1(Z,W,X,Y) \\
& + 2R_1(X,JY,Z,JW) + R_1(X,JW,Z,JY) \\
& + 2R_1(Y,JX,W,JZ) + R_1(Y,JZ,W,JX) \\
& - 2R_1(X,JY,W,JZ) - R_1(X,JZ,W,JY) \\
& - 2R_1(Y,JX,Z,JW) - R_1(Y,JW,Z,JX).
\end{aligned}
$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 可得

$$
\begin{aligned}
& B(R_1,S)(X,Y,Z,W) \\
& = 2R_1(X,Y,Z,W) + 2R_1(X,JW,Y,JZ) - 2R_1(X,JZ,Y,JW) \\
& = 2R_1(X,Y,JZ,JW) + 2R_1(X,JW,Y,JZ) - 2R_1(X,JZ,Y,JW) \\
& = 0.
\end{aligned}
$$

□

命题 9.23 我们有 $Q(R) = Q(R_1) + \kappa^2 Q(R_0)$.

证明 固定一个点 $p \in M$. 假设 $I, J, K \in \mathscr{J}_p$ 是三个近复结构, 满足 $IJK = -\mathrm{id}$. 我们定义代数曲率张量 $S_0, S_1, S_2, S_3 \in \mathscr{C}_B(T_pM)$ 为

$$\begin{aligned}
S_0(X, Y, Z, W) &= g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z),\\
S_1(X, Y, Z, W) &= 2g(IX, Y)g(IZ, W)\\
&\quad + g(IX, Z)g(IY, W) - g(IX, W)g(IY, Z),\\
S_2(X, Y, Z, W) &= 2g(JX, Y)g(JZ, W)\\
&\quad + g(JX, Z)g(JY, W) - g(JX, W)g(JY, Z),\\
S_3(X, Y, Z, W) &= 2g(KX, Y)g(KZ, W)\\
&\quad + g(KX, Z)g(KY, W) - g(KX, W)g(KY, Z),
\end{aligned}$$

其中, 向量 $X, Y, Z, W \in T_pM$. 根据引理 9.21 和 9.22,

$$B(R_1, S_0) = B(R_1, S_1) = B(R_1, S_2) = B(R_1, S_3) = 0.$$

由于 $S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = 4R_0$, 所以 $B(R_1, R_0) = 0$. 这意味着

$$Q(R) = Q(R_1) + 2\kappa B(R_1, R_0) + \kappa^2 Q(R_0) = Q(R_1) + \kappa^2 Q(R_0). \qquad \square$$

定理 9.24 假设对任意的点 $p \in M$, 任意的单位向量 $X \in T_pM$ 和任意的近复结构 $J \in \mathscr{J}$, 有 $R_1(X, JX, X, JX) < \kappa$. 那么, R_1 恒为零.

证明 根据 (95), R_1 的 Ricci 张量为零. 所以 $\mathrm{Ric}_g = (m + 2)\kappa g$. 从而, 由命题 2.11 可知

$$\Delta R + Q(R) = (2m + 4)\kappa R.$$

注意到 $Q(R_0) = (2m + 4)R_0$. 利用命题 9.23, $Q(R) = Q(R_1) + (2m + 4)\kappa^2 R_0$. 并且, 由于 R_0 是平行的, 所以 $\Delta R = \Delta R_1$. 从而,

$$\Delta R_1 + Q(R_1) = (2m + 4)\kappa R_1.$$

接下来, 我们选定一个点 $p \in M$, 一个单位向量 $X \in T_pM$ 和一个近复结构 $J \in \mathscr{J}$, 使得 $R_1(X, JX, X, JX)$ 是最大的. 这意味着, 对所有的向量 $v \in T_pM$, 有

$$(D^2_{v,v}R_1)(X, JX, X, JX) \leqslant 0.$$

对上式的 v 取迹, 可得

$$(\Delta R_1)(X, JX, X, JX) \leqslant 0.$$

结合上述事实, 可得

$$Q(R_1)(X, JX, X, JX) \geqslant (2m+4)\kappa R_1(X, JX, X, JX). \tag{96}$$

现在, 我们分析这一项 $Q(R_1)(X, JX, X, JX)$. 为方便起见, 记 $w_1 = X$, $w_2 = IX$. 我们可以找到向量 $w_3, \cdots, w_{2m} \in T_pM$, 使得 $\{w_1, Jw_1, w_2, Jw_2, \cdots, w_{2m}, Jw_{2m}\}$ 构成 T_pM 的一组单位正交基, 而且, 对 $3 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2m$, 有

$$R_1(X, JX, w_\alpha, w_\beta) = R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\beta) = 0.$$

根据引理 9.16, 对 $2 \leqslant \beta \leqslant 2m$, 有

$$R_1(X, JX, X, w_\beta) = R_1(X, JX, X, Jw_\beta) = 0.$$

并且, 对 $3 \leqslant \beta \leqslant 2m$, 有

$$R_1(X, JX, X, Iw_\beta) = R_1(X, JX, X, JIw_\beta) = 0.$$

利用 (95), 对 $3 \leqslant \beta \leqslant 2m$, 有

$$R_1(X, JX, IX, w_\beta) = R_1(X, JX, IX, Jw_\beta) = 0.$$

结合上述事实, 对 $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2m$, 有

$$R_1(X, JX, w_\alpha, w_\beta) = R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\beta) = 0. \tag{97}$$

利用引理 9.16, 对 $3 \leqslant \alpha \leqslant 2m$, 有

$$2R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\alpha) \leqslant R_1(X, JX, X, JX)$$

和

$$2R_1(X, JX, Iw_\alpha, JIw_\alpha) \leqslant R_1(X, JX, X, JX).$$

基于 (95), 最后一个不等式可以改写成

$$-2R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\alpha) \leqslant R_1(X, JX, X, JX).$$

从而, 对 $3 \leqslant \alpha \leqslant 2m$, 有

$$4R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\alpha)^2 \leqslant R_1(X, JX, X, JX)^2. \tag{98}$$

再由命题 9.15, 可得

$$\begin{aligned} Q(R_1)(X, JX, X, JX) \leqslant & -2R_1(X, JX, X, JX)^2 \\ & +4\sum_{\alpha,\beta=1}^{2m} R_1(X, JX, w_\alpha, w_\beta)^2 \\ & +4\sum_{\alpha,\beta=1}^{2m} R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\beta)^2. \end{aligned}$$

利用 (97) 和 (98), 可得

$$\begin{aligned} & Q(R_1)(X, JX, X, JX) \\ \leqslant & -2R_1(X, JX, X, JX)^2 + 4\sum_{\alpha=1}^{2m} R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\alpha)^2 \\ = & \ 6R_1(X, JX, X, JX)^2 + 4\sum_{\alpha=3}^{2m} R_1(X, JX, w_\alpha, Jw_\alpha)^2 \\ \leqslant & \ (2m+4)R_1(X, JX, X, JX)^2. \end{aligned} \tag{99}$$

结合 (96) 和 (99), 可得

$$\kappa R_1(X, JX, X, JX) \leqslant R_1(X, JX, X, JX)^2.$$

因为 $R_1(X, JX, X, JX) \leqslant \kappa$, 所以 $R_1(X, JX, X, JX) \leqslant 0$. 从而, R_1 具有非正的全纯截面曲率. 又因为 R_1 的 Ricci 张量为零, 所以 R_1 恒为零. □

命题 9.25 假设 (M,g) 具有非负的迷向曲率. 那么对任意的点 $p\in M$, 任意的单位向量 $X\in T_pM$ 和任意的近复结构 $J\in\mathscr{J}$, 有 $R_1(X,JX,X,JX)<\kappa$.

证明 固定一个点 $p\in M$ 和一个单位向量 $X\in T_pM$. 假设 $I,J,K\in\mathscr{J}_p$ 是三个近复结构, 满足 $IJK=-\mathrm{id}$. 为简单起见, 记 $Y=IX$. 那么

$$
\begin{aligned}
&R_1(X,Y,X,Y)+R_1(X,JY,X,JY)\\
&+R_1(JX,Y,JX,Y)+R_1(JX,JY,JX,JY)\\
=&\,2R_1(X,JX,Y,JY).
\end{aligned}
$$

并且, 由 R_0 的定义,

$$
\begin{aligned}
&R_0(X,Y,X,Y)=R_0(X,JY,X,JY)=1,\\
&R_0(JX,Y,JX,Y)=R_0(JX,JY,JX,JY)=1,\\
&R_0(X,JX,Y,JY)=0.
\end{aligned}
$$

利用恒等式 $R=R_1+\kappa R_0$ 和 (95), 可得

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,X,Y)+R(X,JY,X,JY)\\
&+R(JX,Y,JX,Y)+R(JX,JY,JX,JY)\\
&+2R(X,JX,Y,JY)\\
=&\,4(\kappa+R_1(X,JX,Y,JY))\\
=&\,4(\kappa-R_1(X,JX,X,JX)).
\end{aligned}
$$

因为 (M,g) 具有非负的迷向曲率, 从而

$$R_1(X,JX,X,JX)\leqslant\kappa.$$

接下来我们只需证 $R_1(X,JX,X,JX)\neq\kappa$. 为此, 我们用反证法. 假设 $R_1(X,JX,X,JX)=\kappa$. 这意味着 4-标架 $\{X,JX,Y,-JY\}$ 具有零迷向曲率. 任给单位向量 $Z\in T_pM$, 我们可以找到一个线性同构 $L:T_pM\to$

T_pM, 这个同构关于 I, J, K 是可交换的, 并且 $LX = Z$. 由于和乐群 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{Sp}(m) \cdot \mathrm{Sp}(1)$, 存在一条分段光滑的路径 $\gamma : [0, 1] \to M$, 使得 $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, $P_\gamma = L$. 由定理 9.13, 4-标架 $\{P_\gamma X, P_\gamma JX, P_\gamma Y, -P_\gamma JY\}$ 具有零迷向曲率. 所以, 如果记 $W = IZ$, 那么 4-标架 $\{Z, JZ, W, -JW\}$ 具有零迷向曲率. 从而, 对任意的单位向量 $Z \in T_pM$, $R_1(Z, JZ, Z, JZ) = \kappa$. 因为 R_1 的 Ricci 张量为零, 所以 $\kappa = 0$. 因此, 命题 7.3 意味着 (M, g) 是平坦的. 矛盾. □

推论 9.26 如果 (M, g) 具有非负的迷向曲率, 那么 R_1 恒为零.

注意到, M. Berger 证明了任何具有正截面曲率的四元 Kähler 流形在伸缩变换的意义下一定等距于 $\mathbb{HP}^m$ (见 [12], 命题 2).

9.7 Tachibana 定理的推广

在这一节中, 我们将证明: 任何具有非负迷向曲率的 Einstein 流形一定是局部对称的.

定理 9.27 (S. Brendle [19]) 设 (M, g) 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致 Einstein 流形. 如果对所有的点 $p \in M$ 和任意的单位正交 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$, 有

$$
\begin{aligned}
&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) > 0.
\end{aligned}
$$

那么 (M, g) 具有常截面曲率.

证明 如果有必要, 可以伸缩形变度量, 使得 $\mathrm{Ric}_g = (n-1)g$. 利用命题 2.11, 可得

$$\Delta R + Q(R) = 2(n-1)R.$$

定义

$$S_{ijkl} = R_{ijkl} - \kappa(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

其中 κ 是一个正常数. 注意到 S 是一个代数曲率张量. 令 κ 充分大, 使得 S 具有非负迷向曲率. 那么存在一个点 $p \in M$ 和一个 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$, 使得

$$\begin{aligned}&S(e_1, e_3, e_1, e_3) + S(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+S(e_2, e_3, e_2, e_3) + S(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2S(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0.\end{aligned}$$

因此, 根据命题 7.5,

$$\begin{aligned}&Q(S)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(S)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+Q(S)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(S)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2Q(S)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.\end{aligned} \tag{100}$$

另一方面, 注意到

$$\begin{aligned}Q(S)_{ijkl} = {}& Q(R)_{ijkl} - 2(n-1)\kappa^2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\\&-2\kappa(\mathrm{Ric}_{ik}g_{jl} - \mathrm{Ric}_{il}g_{jk} - \mathrm{Ric}_{jk}g_{il} + \mathrm{Ric}_{jl}g_{ik}),\end{aligned}$$

所以

$$Q(S)_{ijkl} = Q(R)_{ijkl} + 2(n-1)\kappa(\kappa-2)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

代入 (100), 可得

$$\begin{aligned}&Q(R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + Q(R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+Q(R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + Q(R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2Q(R)(e_1, e_2, e_3, e_4) + 8(n-1)\kappa(\kappa-2) \geqslant 0.\end{aligned} \tag{101}$$

由于 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 取到 (M, g) 的最小迷向曲率, 所以对任意的向量 $v \in T_pM$, 有

$$\begin{aligned}&(D^2_{v,v}R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + (D^2_{v,v}R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+(D^2_{v,v}R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + (D^2_{v,v}R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2(D^2_{v,v}R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.\end{aligned}$$

对上式的 $v \in T_pM$ 取迹, 可得

$$\begin{aligned}&(\Delta R)(e_1, e_3, e_1, e_3) + (\Delta R)(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+(\Delta R)(e_2, e_3, e_2, e_3) + (\Delta R)(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2(\Delta R)(e_1, e_2, e_3, e_4) \geqslant 0.\end{aligned} \tag{102}$$

将 (101) 和 (102) 加起来, 再除以 $2(n-1)$. 这意味着

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) + 4\kappa(\kappa - 2) \geqslant 0.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) + 4\kappa = 0.\end{aligned}$$

由于 κ 是正的, 从而 $\kappa \geqslant 1$. 因此, S 具有非负的迷向曲率和非正的 Ricci 曲率. 根据命题 7.3, $S = 0$. 证明完毕. □

命题 9.28 设 (M, g) 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的不可约的、紧致的、单连通的 Einstein 流形, 具有非负的迷向曲率. 那么 (M, g) 等距于一个对称空间.

证明 假设结论不成立. 那么由推论 9.4, 只有三种可能性:

情形 1: 假设 $\mathrm{Hol}(M, g) = \mathrm{SO}(n)$. 在这种情形下, 由推论 9.14 可知, 对所有的单位正交 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 有

$$\begin{aligned}&R(e_1, e_3, e_1, e_3) + R(e_1, e_4, e_1, e_4)\\&+R(e_2, e_3, e_2, e_3) + R(e_2, e_4, e_2, e_4)\\&-2R(e_1, e_2, e_3, e_4) > 0.\end{aligned}$$

再利用定理 9.27, (M,g) 具有常截面曲率. 特别地, (M,g) 是对称空间. 与假设矛盾.

情形 2: 假设 $n = 2m$, $\mathrm{Hol}(M,g) = \mathrm{U}(m)$. 在这种情形下, (M,g) 是 Kähler 流形. 利用推论 9.19, (M,g) 具有常全纯截面曲率. 从而, 经过伸缩变换后, (M,g) 等距于 $\mathbb{CP}^m$. 与假设 (M,g) 不是对称空间相矛盾.

情形 3: 假设 $n = 4m \geqslant 8$, $\mathrm{Hol}(M,g) = \mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$. 在这种情形下, (M,g) 是四元 Kähler 流形. 继而, 利用推论 9.26, (M,g) 等距于一个对称空间. 矛盾. □

定理 9.29 (S. Brendle [19]) *设 (M,g) 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致 Einstein 流形, 具有非负的迷向曲率. 那么 (M,g) 是局部对称的.*

证明 如果 (M,g) 是 Ricci 平坦的, 那么由命题 7.3, (M,g) 是平坦的. 因此, 我们只需考虑 (M,g) 具有正的 Einstein 常数. 由 de Rham 的一个定理 (见 [13], 定理 10.43), (M,g) 的万有覆盖等距于一些黎曼流形的乘积 $N_1 \times \cdots \times N_j$, 其中, $N_1, \cdots, N_j$ 是单连通的, 而且不可约. 由于 (M,g) 是 Einstein 流形, 所以每个分裂因子 $N_1, \cdots, N_j$ 也是 Einstein 流形. 另一方面, (M,g) 具有正的 Einstein 常数, 根据 Myers 定理, $N_1, \cdots, N_j$ 是紧致的. 根据命题 9.28, 每个分裂因子 $N_1, \cdots, N_j$ 等距于一个对称空间. 从而, (M,g) 是局部对称的. □

定理 9.27 和 9.29 推广了 M. Berger [10, 11] 和 S. Tachibana [84] 早期的一些工作. 我们也注意到 M. Gursky 和 C. LeBrun [43] 得到了一些关于具有非负截面曲率的四维 Einstein 流形的有趣的结果. 这个方面还有一个结果是由 D. Yang [87] 得到的.

9.8 分类结果

在最后一节中, 我们要描述一些分类结果. 第一个结果是关于 Micallef-Moore 定理的刚性情况.

定理 9.30 (S. Brendle [19]) *设 (M,g_0) 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的不可约*

的、单连通的紧致流形, 具有非负的迷向曲率. 那么下述的某一种情况一定成立:

(i) M 同胚于球面 S^n.

(ii) $n = 2m$, (M, g_0) 是 Kähler 流形.

(iii) (M, g_0) 等距于一个对称空间.

证明 假设 (M, g_0) 不等距于一个对称空间. 设 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初始度量的 Ricci 流的唯一解. 由连续性, 存在一个实数 $\delta \in (0, T)$, 使得对所有的 $t \in (0, \delta)$, $(M, g(t))$ 是不可约的, 并且不等距于一个对称空间. 根据推论 9.4, 只有三种可能性:

情形 1: 假设存在某个 $\tau \in (0, \delta)$, 使得 $\mathrm{Hol}(M, g(\tau)) = \mathrm{SO}(n)$. 由推论 9.14 可知, 对所有的单位正交 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 有

$$\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4)\\
&+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4)\\
&-2R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) > 0.
\end{aligned}$$

从而由定理 1.20, M 同胚于球面 S^n.

情形 2: 假设 $n = 2m$, 对所有的 $t \in (0, \delta)$, $\mathrm{Hol}(M, g(t)) = \mathrm{U}(m)$. 在这种情形下, 对所有的 $t \in (0, \delta)$, $(M, g(t))$ 是 Kähler 流形. 由于 $g(t) \to g_0$ 是在 C^∞ 的意义下收敛的, 所以 (M, g_0) 是 Kähler 流形.

情形 3: 假设 $n = 4m \geqslant 8$, 存在某个 $\tau \in (0, \delta)$, 使得 $\mathrm{Hol}(M, g, (\tau)) = \mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$. 在这种情形下, $(M, g(\tau))$ 是四元 Kähler 流形. 由推论 9.26, $(M, g(\tau))$ 等距于一个对称空间. 矛盾. □

我们还可以对定理 9.30 的结论 (ii) 了解得更清楚一些. 为此, 我们考虑一个不可约的、单连通的紧致 Kähler 流形, 具有非负的迷向曲率. 由 Seshadri [76] 的一个结论, 这样的流形一定双全纯等价于一个复投影空间, 或者等距于一个对称空间. 其证明依赖于调和映射的技巧, 而且和肖荫堂–丘成桐 [80] 证明 Frankle 猜测的想法是类似的.

接下来, 我们考虑 Ricci 流的一个解, 其曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 在这种情况下, 我们可以对流形 $(M, g(t)) \times S^1$ 应用定理 9.13.

定理 9.31　设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上 Ricci 流的解. 假设对所有的时间 $t \in [0, T]$ 和所有的点 $p \in M$, 关于度量 $g(t)$ 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 同时, 我们固定一个实数 $\tau \in (0, T)$ 和 $\lambda \in [0, 1]$. 考虑关于度量 $g(t)$ 的单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 满足

$$\begin{aligned} &R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ &+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ &-2\lambda R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0. \end{aligned}$$

那么, 所有这样的 4-标架所构成的集合是平移不变的.

证明　由假设, 对所有的时间 $t \in [0, T]$ 和所有的点 $p \in M$, 关于度量 $g(t)$ 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 那么, 对于任意的时间 $t \in [0, T]$, 乘积空间 $(M, g(t)) \times S^1$ 具有非负的迷向曲率. 因此, 我们可以对流形 $(M, g(t)) \times S^1$ 应用定理 9.13.

现在, 假设 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$ 是一个单位正交的 4-标架, 满足

$$\begin{aligned} &R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ &+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4) \\ &-2\lambda R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0. \end{aligned} \tag{103}$$

定义一个单位正交的 4-标架 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\} \subset T_pM \times \mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} &\tilde{e}_1 = (e_1, 0), \qquad &\tilde{e}_2 = (e_2, 0), \\ &\tilde{e}_3 = (e_3, 0), \qquad &\tilde{e}_4 = (\lambda e_4, \sqrt{1 - \lambda^2}). \end{aligned}$$

关系式 (103) 意味着

$$\begin{aligned} &\tilde{R}_{g(\tau)}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3, \tilde{e}_1, \tilde{e}_3) + \tilde{R}_{g(\tau)}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_4, \tilde{e}_1, \tilde{e}_4) \\ &+\tilde{R}_{g(\tau)}(\tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) + \tilde{R}_{g(\tau)}(\tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4) \\ &-2\tilde{R}_{g(\tau)}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4) = 0, \end{aligned} \tag{104}$$

其中 $\tilde{R}_{g(\tau)} \in \mathscr{C}_B(T_pM \times \mathbb{R})$ 是曲率张量 $R_{g(\tau)} \in \mathscr{C}_B(T_pM)$ 的平凡延拓. 由定理 9.13, 满足 (104) 的所有单位正交 4-标架 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ 所构成的集合是平移不变的. 由此可得结论. □

推论 9.32 设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的单连通的紧致流形, $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上 Ricci 流的解. 假设对所有的时间 $t \in [0, T]$ 和所有的点 $p \in M$, 关于度量 $g(t)$ 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 并且, 假设存在某个时间 $\tau \in [0, T]$, 使得 $\mathrm{Hol}(M, g(\tau)) = \mathrm{SO}(n)$, 那么对任意的 $\lambda \in [0, 1]$ 和所有的单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, 有

$$
\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) > 0.
\end{aligned}
$$

证明 我们用反证法. 假设存在一个点 $p \in M$, 一个单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset T_pM$ 和一个实数 $\lambda \in [0, 1]$, 使得

$$
\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0.
\end{aligned}
$$

我们断言: 对任意的点 $q \in M$ 和任意的单位正交的 3-标架 $\{v_1, v_2, v_3\} \subset T_pM$, 有

$$
R_{g(\tau)}(v_1, v_3, v_1, v_3) + R_{g(\tau)}(v_2, v_3, v_2, v_3) = 0. \tag{105}
$$

由于 $\mathrm{Hol}(M, g(\tau)) = \mathrm{SO}(n)$, 存在一条分段光滑的路径 $\gamma : [0, 1] \to M$, 使得 $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$, 并且

$$
v_1 = P_\gamma e_1, \qquad v_2 = P_\gamma e_2, \qquad v_3 = P_\gamma e_3.
$$

其中, P_γ 是在度量 $g(\tau)$ 下沿着 γ 的平行移动. 为方便起见, 记 $v_4 = P_\gamma e_4$.

由定理 9.31 可得

$$\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_1,v_3)+\lambda^2R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_1,v_4)\\
&+R_{g(\tau)}(v_2,v_3,v_2,v_3)+\lambda^2R_{g(\tau)}(v_2,v_4,v_2,v_4)\\
&-2\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_3,v_4)=0.
\end{aligned}\tag{106}$$

而且, 定理 9.31 还意味着

$$\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_1,v_4)+\lambda^2R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_1,v_2)\\
&+R_{g(\tau)}(v_3,v_4,v_3,v_4)+\lambda^2R_{g(\tau)}(v_3,v_2,v_3,v_2)\\
&-2\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_4,v_2)=0
\end{aligned}\tag{107}$$

和

$$\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_1,v_2)+\lambda^2R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_1,v_3)\\
&+R_{g(\tau)}(v_4,v_2,v_4,v_2)+\lambda^2R_{g(\tau)}(v_4,v_3,v_4,v_3)\\
&-2\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_2,v_3)=0.
\end{aligned}\tag{108}$$

联立等式 (106)—(108), 可得

$$\begin{aligned}
&\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_3,v_4)\geqslant 0,\\
&\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_4,v_2)\geqslant 0,\\
&\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_2,v_3)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

利用第一 Bianchi 恒等式, 可得 $\lambda R_{g(\tau)}(v_1,v_2,v_3,v_4)=0$. 代入 (106),

$$\begin{aligned}
0&\leqslant R_{g(\tau)}(v_1,v_3,v_1,v_3)+R_{g(\tau)}(v_2,v_3,v_2,v_3)\\
&=-\lambda^2[R_{g(\tau)}(v_1,v_4,v_1,v_4)+R_{g(\tau)}(v_2,v_4,v_2,v_4)]\leqslant 0.
\end{aligned}$$

这样, 我们就证明了 (105). 从而流形 $(M,g(\tau))$ 是平坦的. 矛盾. □

定理 9.33 设 M 是一个维数 $n\geqslant 4$ 的单连通的紧致流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量. 假设 (M,g_0) 是不可约的. 我们还假设对所有的点

$p \in M$, 关于度量 g_0 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 记 $g(t), t \in [0,T)$, 是以 g_0 为初始度量的 Ricci 流的唯一最大解. 那么下述的某一种情况一定成立:

(i) 当 $t \to T$ 时, 度量 $\dfrac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛到一个具有常截面曲率 1 的度量.

(ii) $n = 2m$, (M, g_0) 是 Kähler 流形.

(iii) (M, g_0) 等距于一个对称空间.

证明 假设 (M, g_0) 不等距于一个对称空间. 由连续性, 存在一个实数 $\delta \in (0, T)$, 使得对所有的 $t \in (0, \delta)$, $(M, g(t))$ 是不可约的, 并且不等距于一个对称空间. 根据推论 9.4, 只有三种可能性:

情形 1: 假设存在某个 $\tau \in (0, \delta)$, 使得 $\mathrm{Hol}(M, g(\tau)) = \mathrm{SO}(n)$. 由推论 9.32 可知, 对所有的单位正交 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 和所有的 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned}
&R_{g(\tau)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_1, e_4, e_1, e_4) \\
&+R_{g(\tau)}(e_2, e_3, e_2, e_3) + \lambda^2 R_{g(\tau)}(e_2, e_4, e_2, e_4) \\
&-2\lambda R_{g(\tau)}(e_1, e_2, e_3, e_4) > 0.
\end{aligned}$$

从而由定理 8.17, 度量 $\dfrac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛到一个具有常截面曲率 1 的度量.

情形 2: 假设 $n = 2m$, 对所有的 $t \in (0, \delta)$, $\mathrm{Hol}(M, g(t)) = \mathrm{U}(m)$. 在这种情形下, 对所有的 $t \in (0, \delta)$, $(M, g(t))$ 是 Kähler 流形. 由于 $g(t) \to g_0$ 是在 C^∞ 的意义下收敛的, 所以 (M, g_0) 是 Kähler 流形.

情形 3: 假设 $n = 4m \geqslant 8$, 存在某个 $\tau \in (0, \delta)$, 使得 $\mathrm{Hol}(M, g, (\tau)) = \mathrm{Sp}(m)\cdot\mathrm{Sp}(1)$. 在这种情形下, $(M, g(\tau))$ 是四元 Kähler 流形. 由推论 9.26, $(M, g(\tau))$ 等距于一个对称空间. 矛盾. □

最后, 我们分类所有具有逐点弱 1/4-夹的流形. 为此, 我们需要下述的结论:

命题 9.34 设 (M, g) 是一个维数 $2m \geqslant 4$ 的 Kähler 流形. 如果 (M, g) 是逐点弱 1/4-夹的, 那么 (M, g) 具有常全纯截面曲率.

证明　任给一点 $p \in M$, 我们记 $K_{\max}(p)$ 为 p 点处最大的截面曲率. 同样地, 我们记 $K_{\min}(p)$ 为 p 点处最小的截面曲率. 由于 (M, g) 是弱 1/4-夹的, 那么 $0 \leqslant K_{\max}(p) \leqslant 4K_{\min}(p)$.

接下来, 我们考虑 J 不变的二维平面 $\pi \subset T_pM$. 断言: $K(\pi) = 4K_{\min}(p)$. 由于 $m \geqslant 2$, 我们可以找到单位向量 $X, Y \in T_pM$, 使得 $g(X, Y) = g(JX, Y) = 0$, 而且 $X + Y \in \pi$. 利用第一 Bianchi 恒等式, 可得

$$R(X, JX, Y, JY) = R(X, Y, X, Y) + R(X, JY, X, JY) \geqslant 2K_{\min}(p).$$

另一方面, 根据命题 1.9, 可知

$$R(X, JX, Y, JY) \leqslant \frac{2}{3}(K_{\max}(p) - K_{\min}(p)) \leqslant 2K_{\min}(p).$$

分析命题 1.9 中等号成立的情况, 可知

$$R(X + Y, JX + JY, X + Y, JX + JY) = 16K_{\min}(p).$$

因此, $K(\pi) = 4K_{\min}(p)$.

所以, (M, g) 具有逐点的常全纯截面曲率. 特别地, (M, g) 的无迹 Ricci 张量为零. 由推论 1.6, (M, g) 的数量曲率为常数. 从而, (M, g) 具有常全纯截面曲率. □

定理 9.35　*设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的单连通的紧致流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量. 假设 (M, g_0) 是不可约的, 不等距于一个对称空间, 而且 (M, g_0) 是逐点弱 1/4-夹的. 记 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初始度量的 Ricci 流的唯一最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛到一个具有常截面曲率 1 的度量.*

证明　根据命题 8.13, 对所有的点 $p \in M$, 关于度量 g_0 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 由定理 9.33, 只有两种可能性:

情形 1: 当 $t \to T$ 时, 度量 $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛到一个具有常截面曲率 1 的度量.

情形 2: $n = 2m$, (M, g_0) 是 Kähler 流形. 利用命题 9.34, (M, g_0) 具有常全纯截面曲率. 从而, 经过伸缩变换后, (M, g_0) 等距于 $\mathbb{CP}^m$. 与假设 (M, g_0) 不是对称空间相矛盾. □

定理 9.36 (S. Brendle, R. Schoen [21]) 设 M 是一个维数 $n \geqslant 4$ 的紧致流形, g_0 是 M 上一个黎曼度量. 假设 (M, g_0) 不是局部对称的, 而且 (M, g_0) 是逐点弱 1/4-夹的. 记 $g(t), t \in [0, T)$, 是以 g_0 为初始度量的 Ricci 流的唯一最大解. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $\frac{1}{2(n-1)(T-t)}g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛到一个具有常截面曲率 1 的度量.

证明 我们首先假设 (M, g_0) 是局部可约的. 由于 (M, g_0) 是逐点弱 1/4-夹的, 从而 (M, g_0) 是平坦的. 这与 (M, g_0) 不是局部对称的假设矛盾.

所以 (M, g_0) 是局部不可约的. 由 Cheeger-Gromoll [27] 的分裂定理, (M, g_0) 的万有覆盖等距于黎曼流形的乘积 $N \times \mathbb{R}^k$, 其中 N 是紧致的 (见 [13], 推论 6.67). 由于 (M, g_0) 是局部不可约的, 所以 $k = 0$. 因此, M 的万有覆盖是紧致的. 如果我们对 (M, g_0) 的万有覆盖应用命题 9.35, 可知结论成立. □



附录 A　发展的度量的收敛性

设 M 是一个紧致流形, $g(t), t \in [0,T)$, 是 M 上一族光滑的单参数黎曼度量. 为简便起见, 记

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \omega(t).$$

我们还定义一个函数 $u_0 : [0,T) \to \mathbb{R}$ 为

$$u_0(t) = \sup_M |\omega(t)|_{g(t)}, \quad t \in [0,T).$$

引理 A.1　假设 $\int_0^T u_0(t)dt < \infty$. 那么这一族度量是一致等价的; 也就是说, 存在一个正常数 C, 使得对于任意的点 $(p,t) \in M \times [0,T)$ 和任意的向量 $v \in T_pM$, 有

$$\frac{1}{C}|v|^2_{g(0)} \leqslant |v|^2_{g(t)} \leqslant C|v|^2_{g(t)}.$$

证明　固定一点 $(p,t) \in M \times [0,T)$ 和一个向量 $v \in T_pM$, 那么

$$\left|\frac{d}{dt}|v|^2_{g(t)}\right| \leqslant |\omega(t)|_{g(t)}|v|^2_{g(t)} \leqslant u_0(t)|v|^2_{g(t)}.$$

因为 $\int_0^T u_0(t)dt < \infty$, 从而我们可以得到结论. □

我们记 D 是依时间变化的度量 $g(t)$ 所对应的 Levi-Civita 联络. 下述的引理能让我们将依时间变化的联络 D 转化成 M 上一个固定的联络 $\hat{D}$.

引理 A.2 假设 g 是 M 上一个黎曼度量, D 是度量 g 所对应的 Levi-Civita 联络. 并且, 假设 $\hat{D}$ 是 M 上无挠的联络. 那么

$$D_X Y = \hat{D}_X Y + \Gamma(X, Y),$$

其中, Γ 定义为

$$2g(\Gamma(X, Y), Z) = (\hat{D}_X g)(Y, Z) + (\hat{D}_Y g)(X, Z) - (\hat{D}_Z g)(X, Y).$$

证明 由于 $\hat{D}$ 是无挠的, 那么对所有的向量场 X, Y, Z, 有

$$\begin{aligned}2g(D_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y))\\&\quad+g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)\\&= (\hat{D}_X g)(Y, Z) + (\hat{D}_Y g)(X, Z) - (\hat{D}_Z g)(X, Y)\\&\quad+2g(\hat{D}_X Y, Z).\end{aligned}$$

□

引理 A.3 假设 D 是度量 $g(t)$ 所对应的 Levi-Civita 联络. 并且, 假设 $\hat{D}$ 是 M 上一个固定的无挠的联络. 那么对 $m = 1, 2, \cdots$,

$$D^m \omega(t) - \hat{D}^m \omega(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i_1+\cdots+i_q=m-l} \hat{D}^{i_1} g(t) * \cdots * \hat{D}^{i_q} g(t) * \hat{D}^l \omega(t).$$

证明 我们关于 m 用数学归纳法来证明. 利用引理 A.2,

$$D\omega(t) - \hat{D}\omega(t) = \hat{D}g(t) * \omega(t).$$

所以, 当 $m = 1$ 时结论成立. 假设当 $m \geqslant 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}&D^{m-1}\omega(t) - \hat{D}^{m-1}\omega(t)\\&= \sum_{l=0}^{m-2} \sum_{i_1+\cdots+i_q=m-l-1} \hat{D}^{i_1} g(t) * \cdots * \hat{D}^{i_q} g(t) * \hat{D}^l \omega(t).\end{aligned}$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&DD^{m-1}\omega(t) - D\hat{D}^{m-1}\omega(t)\\
&=\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{i_1+\cdots+i_q=m-l-1}\hat{D}^{i_1}g(t)*\cdots*\hat{D}^{i_q}g(t)*D\hat{D}^{l}\omega(t)\\
&\quad+\sum_{l=0}^{m-2}\sum_{i_1+\cdots+i_q=m-l-1}\hat{D}^{i_1}g(t)*\cdots*\hat{D}^{i_{q-1}}g(t)*D\hat{D}^{i_q}g(t)*\hat{D}^{l}\omega(t).
\end{aligned}
$$

并且, 根据引理 A.2,

$$
D\hat{D}^{l}\omega(t) = \hat{D}\hat{D}^{l}\omega(t) + \hat{D}g(t)*\hat{D}^{l}\omega(t),
$$

同时,

$$
D\hat{D}^{j}g(t) = \hat{D}\hat{D}^{j}g(t) + \hat{D}g(t)*\hat{D}^{j}g(t).
$$

结合所有的事实, 我们可得结论

$$
D^{m}\omega(t) - \hat{D}^{m}\omega(t) = \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i_1+\cdots+i_q=m-l}\hat{D}^{i_1}g(t)*\cdots*\hat{D}^{i_q}g(t)*\hat{D}^{l}\omega(t). \qquad \square
$$

为简单起见, 假设 $\hat{D}$ 是度量 $\hat{g} = g(0)$ 所对应的 Levi-Civita 联络. 对任意的整数 $m \geqslant 1$, 我们定义两个连续函数 $u_m : [0,T) \to \mathbb{R}$ 和 $\hat{u}_m : [0,T) \to \mathbb{R}$ 为

$$
\begin{aligned}
u_m(t) &= \sup_M |D^m\omega(t)|_{g(t)},\\
\hat{u}_m(t) &= \sup_M |\hat{D}^m\omega(t)|_{\hat{g}}.
\end{aligned}
$$

利用等式

$$
g(t) = \hat{g} + \int_0^t \omega(\tau)d\tau,
$$

那么

$$
\sup_M |\hat{D}^m g(t)|_{\hat{g}} \leqslant \int_0^t \hat{u}_m(\tau)d\tau. \tag{109}
$$

引理 A.4　假设对任意的 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 有 $\int_0^T u_m(t)dt < \infty$. 那么对任意的 $m = 1, 2, \cdots$, 有 $\int_0^T \hat{u}_m(t)dt < \infty$.

证明　我们关于 m 用数学归纳法来证明. 固定 $m \geqslant 1$, 假设对所有的 $l = 1, 2, \cdots, m-1$, 有 $\int_0^T \hat{u}_l(t)dt < \infty$. 根据 (109),

$$\sup_{t \in [0,T)} \sup_M |\hat{D}^l g(t)|_{\hat{g}} < \infty.$$

并且, 由引理 A.1, 度量 $g(t)$ 是一致等价的. 从而, 利用引理 A.3, 存在正常数 C_1, 使得

$$\begin{aligned} &|\hat{D}^m \omega(t)|_{\hat{g}} - |D^m \omega(t)|_{\hat{g}} \\ &\leqslant C_1 \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i_1+\cdots+i_q=m-l} |\hat{D}^{i_1} g(t)|_{\hat{g}} \cdots |\hat{D}^{i_q} g(t)|_{\hat{g}} |\hat{D}^l \omega(t)|_{\hat{g}}. \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} |\hat{D}^m \omega(t)|_{\hat{g}} \leqslant & |D^m \omega(t)|_{\hat{g}} + C_2 \sum_{l=1}^{m-1} |\hat{D}^l \omega(t)|_{\hat{g}} \\ & + C_2 (1 + |\hat{D}^m g(t)|_{\hat{g}}) |\omega(t)|_{\hat{g}}, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} |\hat{D}^m \omega(t)|_{\hat{g}} \leqslant & C_3 |D^m \omega(t)|_{g(t)} + C_2 \sum_{l=1}^{m-1} |\hat{D}^l \omega(t)|_{\hat{g}} \\ & + C_2 C_3 (1 + |\hat{D}^m g(t)|_{\hat{g}}) |\omega(t)|_{g(t)}. \end{aligned}$$

再次利用 (109), 可得

$$\begin{aligned} \hat{u}_m(t) \leqslant & C_3 u_m(t) + C_2 \sum_{l=1}^{m-1} \hat{u}_l(t) \\ & + C_2 C_3 u_0(t) \left(1 + \int_0^t \hat{u}_m(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \log \left(1 + \int_0^t \hat{u}_m(\tau) d\tau \right) \\ & \leqslant C_3 u_m(t) + C_2 \sum_{l=1}^{m-1} \hat{u}_l(t) + C_2 C_3 u_0(t). \end{aligned}$$

由假设, $\int_0^T u_0(t)dt < \infty$, $\int_0^T u_m(t)dt < \infty$. 并且, 由归纳假设知, 对 $l = 1, 2, \cdots, m-1$, $\int_0^T \hat{u}_l(t)dt < \infty$. 结合所有的事实, 我们得到

$$\int_0^T \hat{u}_m(t)dt < \infty.$$

从而我们可以得到结论. □

命题 A.5　假设对任意的 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 有 $\int_0^T u_m(t)dt < \infty$. 那么, 当 $t \to T$ 时, 度量 $g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛于一个光滑的极限度量 $\overline{g}$.

证明　由引理 A.4, 对任意的 $m = 1, 2, \cdots$, 有 $\int_0^T \hat{u}_m(t)dt < \infty$. 从而, 度量 $g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛于一个对称的 (0,2) 型张量 $\overline{g}$. 并且, 由引理 A.1 知 $\overline{g}$ 是正定的. 证明完毕. □

附录 B　复线性代数的一些结果

设 V 是一个有限维的向量空间, 记 $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 为 V 的复化空间. 我们赋予 V 一个内积 $g : V \times V \to \mathbb{R}$. 我们将 g 延拓成一个复双线性型 $g : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

命题 B.1　对所有的向量 $z, w \in V^{\mathbb{C}}$, 我们有

$$|g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2| \leqslant g(z,\overline{z})g(w,\overline{w}) - |g(z,\overline{w})|^2.$$

证明　记 $z \wedge w = \varphi + i\psi$, 其中 $\varphi, \psi \in \wedge^2 V$. 那么

$$\begin{aligned} g(z,\overline{z})g(w,\overline{w}) - |g(z,\overline{w})|^2 &= g(z \wedge w, \overline{z} \wedge \overline{w}) \\ &= g(\varphi + i\psi, \varphi - i\psi) \\ &= |\varphi|^2 + |\psi|^2. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2 &= g(z \wedge w, z \wedge w) \\ &= g(\varphi + i\psi, \varphi + i\psi) \\ &= |\varphi|^2 - |\psi|^2 + 2i\langle\varphi, \psi\rangle. \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned}|g(z,z)g(w,w)-g(z,w)^2|^2 &= (|\varphi|^2-|\psi|^2)^2+4\langle\varphi,\psi\rangle^2\\ &\leqslant (|\varphi|^2-|\psi|^2)^2+4|\varphi|^2|\psi|^2\\ &= (|\varphi|^2+|\psi|^2)^2,\end{aligned}$$

从而

$$|g(z,z)g(w,w)-g(z,w)^2|\leqslant|\varphi|^2+|\psi|^2.$$

结合上述事实, 结论成立. □

引理 B.2 设 σ 是 $V^{\mathbb{C}}$ 中一个复的二维平面. 那么存在向量 $z,w\in\sigma$, 使得 $g(z,\overline{z})=g(w,\overline{w})=1$, 并且 $g(z,\overline{w})=g(z,w)=0$.

证明 设 $\{\zeta,\eta\}$ 是 σ 的一组单位正交基. 那么 $g(\zeta,\overline{\zeta})=g(\eta,\overline{\eta})=1$, 且 $g(\zeta,\overline{\eta})=0$. 若 $g(\zeta,\eta)=0$, 那么结论成立. 因此, 我们只需证明 $g(\zeta,\eta)\neq 0$ 的情况. 由插值定理, 存在一个实数 δ, 使得

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{2i\delta}g(\zeta,\zeta)-e^{-2i\delta}g(\eta,\eta)}{g(\zeta,\eta)}\right)=0.$$

并且, 我们能找到一个实数 θ, 使得

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta\operatorname{Re}\left(\frac{e^{2i\delta}g(\zeta,\zeta)-e^{-2i\delta}g(\eta,\eta)}{g(\zeta,\eta)}\right)=\cos 2\theta.$$

定义

$$z=\cos\theta e^{i\delta}\zeta+\sin\theta e^{-i\delta}\eta$$

和

$$w=-\sin\theta e^{i\delta}\zeta+\cos\theta e^{-i\delta}\eta.$$

直接计算, 可得 $g(z,\overline{z})=g(w,\overline{w})=1$, $g(z,\overline{w})=0$. 并且,

$$g(z,w)=\cos 2\theta g(\zeta,\eta)-\frac{1}{2}\sin 2\theta\left(e^{2i\delta}g(\zeta,\zeta)-e^{-2i\delta}g(\eta,\eta)\right)=0.$$

从而结论成立. □

命题 B.3　假设 $\dim_{\mathbb{R}} V \geqslant 4$. 并且假设 σ 是 $V^{\mathbb{C}}$ 中一个复的二维平面. 那么存在一组单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 使得 $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$, $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$.

证明　由引理 B.2, 存在向量 $z, w \in \sigma$, 使得 $g(z,\overline{z}) = g(w,\overline{w}) = 1$, $g(z,\overline{w}) = g(z,w) = 0$. 并且, 存在一个实数 a, 使得 $\mathrm{Im}(e^{2ia}g(z,z)) = 0$, $\mathrm{Re}(e^{2ia}g(z,z)) \geqslant 0$. 类似地, 存在一个实数 b, 使得 $\mathrm{Im}(e^{2ib}g(w,w)) = 0$, $\mathrm{Re}(e^{2ib}g(w,w)) \geqslant 0$.

接下来, 对于合适的向量 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, 我们记 $e^{ia}z = v_1 + iv_2$, $e^{ib}w = v_3 + iv_4$, 从而,

$$g(v_1 + iv_2, v_3 - iv_4) = e^{i(a-b)}g(z,\overline{w}) = 0,$$

$$g(v_1 + iv_2, v_3 + iv_4) = e^{i(a+b)}g(z,w) = 0,$$

并且,

$$g(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{2ia}g(z,z)) = 0,$$
$$g(v_3, v_4) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{2ib}g(w,w)) = 0.$$

所以, 向量 v_1, v_2, v_3, v_4 是相互正交的. 同时,

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 = g(z,\overline{z}) = 1,$$

$$|v_3|^2 + |v_4|^2 = g(w,\overline{w}) = 1,$$

而且,

$$|v_1|^2 - |v_2|^2 = \mathrm{Re}(e^{2ia}g(z,z)) \geqslant 0,$$

$$|v_3|^2 - |v_4|^2 = \mathrm{Re}(e^{2ib}g(w,w)) \geqslant 0.$$

因此, 存在一组单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 使得

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}e_1, \qquad v_2 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}e_2,$$
$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}e_3, \qquad v_4 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}e_4.$$

这意味着

$$e_1 + i\mu e_2 = \sqrt{1+\mu^2}(v_1 + iv_2) = \sqrt{1+\mu^2}e^{ia}z \in \sigma,$$
$$e_3 + i\lambda e_4 = \sqrt{1+\lambda^2}(v_3 + iv_4) = \sqrt{1+\lambda^2}e^{ib}w \in \sigma.$$

证明完毕. □

推论 B.4 假设 $\dim_{\mathbb{R}} V \geqslant 4$. 并且, 设 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ 是两个线性无关的向量, 满足 $g(\zeta,\zeta)g(\eta,\eta) - g(\zeta,\eta)^2 = 0$, 记由 ζ, η 张成的复的二维平面为 $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$. 那么, 存在一组单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 使得 $e_1 + ie_2 \in \sigma$, $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$.

证明 由命题 B.3, 存在一组单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 使得 $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$, $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$. 为简单起见, 记 $z = e_1 + i\mu e_2$ 和 $w = e_3 + i\lambda e_4$. 因为 $z, w \in \sigma$, $g(\zeta,\zeta)g(\eta,\eta) - g(\zeta,\eta)^2 = 0$, 可知 $g(z,z)g(w,w) - g(z,w)^2 = 0$. 从而, $\lambda = 1$ 或 $\mu = 1$. 由此可以容易地得到结论. □

推论 B.5 假设 $\dim_{\mathbb{R}} V \geqslant 4$. 并且, 设 $\zeta, \eta \in V^{\mathbb{C}}$ 是两个线性无关的向量, 满足 $g(\zeta,\zeta) = g(\zeta,\eta) = g(\eta,\eta) = 0$, 记由 ζ, η 张成的复的二维平面为 $\sigma \subset V^{\mathbb{C}}$. 那么, 存在一组单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$, 使得 $e_1 + ie_2 \in \sigma$, $e_3 + ie_4 \in \sigma$.

证明 由命题 B.3, 存在一组单位正交的 4-标架 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset V$ 和实数 $\lambda, \mu \in [0,1]$, 使得 $e_1 + i\mu e_2 \in \sigma$, $e_3 + i\lambda e_4 \in \sigma$. 为简单起见, 记 $z = e_1 + i\mu e_2$ 和 $w = e_3 + i\lambda e_4$. 因为 $z, w \in \sigma$, $g(\zeta,\zeta) = g(\zeta,\eta) = g(\eta,\eta) = 0$, 可知 $g(z,z) = g(z,w) = g(w,w) = 0$. 这意味着 $\lambda = \mu = 1$. □

问题集

问题 1 这个问题主要是关于调和 2-形式的 Bochner 公式(见 [61] 或 [59]). 设 (M,g) 是一个维数 $n\geqslant 4$ 的紧致流形, ψ 是 M 上的一个调和 2-形式.

(i) 证明

$$\Delta\psi_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ric}_i^j\psi_{jk}+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ric}_k^j\psi_{ij}-2\sum_{j,l=1}^{n}R_{ijkl}\psi^{jl}.$$

(ii) 假设 n 是偶数, 并且 (M,g) 具有非负迷向曲率, 证明 ψ 是平行的.

(iii) 假设 n 是奇数, 并且对所有点 $p\in M,(M,g)$ 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 内. 证明 ψ 是平行的.

问题 2 设 (M,g) 是一个维数 $n\geqslant 4$ 的黎曼流形. 假设对所有点 $p\in M,(M,g)$ 的曲率张量位于锥 $\tilde{C}$ 的内部. 证明任何一个非常值的调和映射 $f:S^2\to M$ 具有的 Morse 指数至少为 $n-2$.

问题 3 设 M 是一个维数为 n 的紧致流形, $g(t),t\in[0,T)$, 是 M 上 Ricci 流的最大解. 证明

$$T\geqslant\frac{c(n)}{\sup_M|R_{g(0)}|},$$

其中 $c(n)$ 是一个依赖于 n 的正常数.

问题 4 设 M 是一个紧致流形, $g(t)$ 是 M 上 Ricci 流的解. 假设 f 是线性热方程 $\frac{\partial}{\partial t}f(t) = \Delta_{g(t)}f(t)$ 的解. 证明函数 $t \to \sup_M |df(t)|^2_{g(t)}$ 是单调递减的.

问题 5 这个问题主要是关于具有高亏格的紧致曲面上的Ricci 流 (见 [46]). 设 M 是一个紧致曲面, $\chi(M) < 0$, 而 $g(t), t \in [0, T)$, 是 M 上 Ricci 流的最大解. 通过伸缩变换, 我们假设 $\mathrm{vol}(M, g(0)) = -4\pi\chi(M)$.

(i) 证明: 对所有的 $t \in [0, T)$, 有 $\mathrm{vol}(M, g(t)) = -4\pi\chi(M)(1 + t)$.

(ii) 证明: 存在一个光滑函数 f, 使得对所有的 $t \in [0, T)$, 有

$$\mathrm{scal} + \Delta f = -\frac{1}{1+t}.$$

并且, 函数 f 满足

$$\frac{\partial}{\partial t}f = \Delta f - \frac{1}{1+t}f + \text{常数}.$$

(iii) 我们考虑函数 $h = -\Delta f + |df|^2$. 证明

$$\frac{\partial}{\partial t}h \leqslant \Delta h - \frac{2}{1+t}h.$$

(iv) 证明

$$\frac{\alpha}{1-\alpha t} \leqslant \mathrm{scal} \leqslant \frac{\beta}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t},$$

其中 $\alpha \leqslant -1$ 是 $g(0)$ 的数量曲率的下确界, β 是函数 $h(0)$ 的上确界. 由此可以知道 $T = \infty$.

(v) 证明伸缩变换后的度量 $\frac{1}{t}g(t)$ 在 C^∞ 的意义下收敛到常数量曲率 -1 的度量.

问题 6 这个问题主要是关于 S^2 上的 Liouville 能量 (见 [67]). 设 g_0 是 S^2 上的球度量, 规范化这个度量使得 $\mathrm{vol}(S^2, g_0) = 8\pi$. 假设 $g(t) = e^{2\varphi(t)}g_0$ 是一族单参数度量, 通过 Ricci 流演化得到的, 并且在 g_0 的共形类中. 证明下述量

$$\int_{S^2} |d\varphi(t)|^2_{g_0} d\mathrm{vol}_{g_0} + \int_{S^2} \varphi(t) d\mathrm{vol}_{g_0} - 4\pi \log\left(\int_{S^2} e^{2\varphi(t)} d\mathrm{vol}_{g_0}\right)$$

关于 t 是单调递减的.

问题 7 这个问题的目的是证明任意维数的非负曲率算子在 Ricci 流下是保持的. 这个结果首先由 R. Hamilton (见 [49], 第 5 节) 证明的.

(i) 设 R 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有非负曲率算子的代数曲率张量. 证明对所有的 $\varphi \in \wedge^2\mathbb{R}^n$, 有 $R^\sharp(\varphi,\varphi) \geqslant 0$.

(ii) 证明锥

$$\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R \text{ 具有非负的曲率算子}\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

问题 8 这个问题的目的是证明任意维数的 2-非负曲率算子在 Ricci 流下是保持的. 这个结果首先由 H. Chen [28] (或见 [49], 第 5 节) 证明的.

(i) 设 R 是 $\mathbb{R}^n$ 上具有 2-非负曲率算子的代数曲率张量. 假设 $\varphi, \psi \in \wedge^2\mathbb{R}^n$ 是单位正交的, 满足 $R(\varphi,\varphi)+R(\psi,\psi) = 0$, 证明 $R^\sharp(\varphi,\varphi)+R^\sharp(\psi,\psi) \geqslant 0$.

(ii) 证明锥

$$\{R \in \mathscr{C}_B(\mathbb{R}^n) : R \text{ 具有 2-非负的曲率算子}\}$$

在 ODE $\frac{d}{dt}R = Q(R)$ 下是不变的.

问题 9 设 V 是一个维数为 3 的赋予内积的向量空间, R 是 V 上一个代数曲率张量. 记 $A_{ij} = \operatorname{scal}\delta_{ij} - 2\operatorname{Ric}_{ij}$.

(i) 证明 $A(v,v) = 2K(\pi)$, 如果 $v \in V$ 是一个单位向量, 而 $\pi \subset V$ 是一个正交于 v 的二维平面.

(ii) 证明

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = &(\operatorname{Ric}_{ik}g_{jl} - \operatorname{Ric}_{il}g_{jk} - \operatorname{Ric}_{jk}g_{il} + \operatorname{Ric}_{jl}g_{ik}) \\ &-\frac{1}{2}\operatorname{scal}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned}$$

(iii) 设 R 是 V 上一个代数曲率张量, 记 $\tilde{R}$ 为 $V \times \mathbb{R}$ 上诱导的曲率张量. 证明 $\tilde{R}$ 具有非负的迷向曲率当且仅当 R 具有非负的 Ricci 曲率.

(iv) 设 R 是 V 上一个代数曲率张量, 记 $\hat{R}$ 为 $V \times \mathbb{R}^2$ 上诱导的曲率张量. 证明 $\hat{R}$ 具有非负的迷向曲率当且仅当 R 具有非负的截面曲率.

问题 10 设 V 是一个维数为 4 的赋予内积的可定向向量空间, R 是 V 上一个代数曲率张量. 我们可以认为 R 是 2-形式空间上的对称双线性型. 2-形式空间可以分裂成直和 $\wedge^2 V = \wedge_+^2 V + \wedge_-^2 V$, 其中 $\wedge_+^2 V$ 是自对偶的 2-形式空间, 而 $\wedge_-^2 V$ 是反自对偶的 2-形式空间. 记

$$\kappa_+ = \inf\left\{R(\varphi,\varphi) + R(\psi,\psi):\ \varphi,\psi \in \wedge_+^2 V,\ |\varphi|^2 = |\psi|^2 = 1,\ \langle\varphi,\psi\rangle = 0\right\}$$

和

$$\kappa_- = \inf\left\{R(\varphi,\varphi) + R(\psi,\psi):\ \varphi,\psi \in \wedge_-^2 V,\ |\varphi|^2 = |\psi|^2 = 1,\ \langle\varphi,\psi\rangle = 0\right\}.$$

证明 R 具有非负的迷向曲率当且仅当 κ_+ 和 κ_- 都是非负的.

问题 11 这个问题主要是关于具有非负迷向曲率的流形中的二维凸超曲面.

(i) 设 V 是一个有限维的赋予内积的向量空间, A 是 V 上的对称双线性型. 假设 A 是 2-非负的, 也就是说, A 的任意两个特征值之和是非负的. 证明对所有满足 $g(z,z) = 0$ 的向量 $z \in V^{\mathbb{C}}$, 有 $A(z,\bar{z}) \geqslant 0$.

(ii) 设 V 是一个有限维的赋予内积的向量空间, A 是 V 上的对称双线性型. 假设 V 是 2-非负的. 证明对所有满足 $g(z,z) = g(z,w) = g(w,w) = 0$ 的向量 $z, w \in V^{\mathbb{C}}$, 有 $A(z,\bar{z})A(w,\overline{w}) - |A(z,\overline{w})|^2 \geqslant 0$.

(iii) 设 (M,g) 是具有非负迷向曲率的黎曼流形, Σ 是 M 中一个二维凸超曲面. 证明 Σ 具有非负的迷向曲率.

问题 12 设 (M,g) 是一个紧致黎曼流形, 存在常数 $\rho \leqslant 0$ 和向量场 ξ, 使得 $\mathrm{Ric}_g + \dfrac{1}{2}\mathscr{L}_\xi g = \rho g$.

(i) 证明 $\inf_M\ \mathrm{scal}_g \geqslant n\rho$.

(ii) 证明 $\mathrm{Ric}_g = \rho g$.

问题 13 这个问题主要是关于三维的收缩 Ricci 孤立子 (见 [55]).

设 (M,g) 是一个三维紧致流形, 存在常数 $\rho > 0$ 和向量场 ξ, 使得 $\mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathscr{L}_\xi g = \rho g$.

(i) 证明

$$\int_M (\mathrm{scal}_g^2 - 2|\mathrm{Ric}_g|^2) d\mathrm{vol}_g = 3\rho^2 \mathrm{vol}(M,g).$$

由此可知 (M,g) 是局部不可约的.

(ii) 证明 (M,g) 具有非负的截面曲率. (提示: 利用推论 6.11.)

(iii) 证明 (M,g) 具有常截面曲率.

问题 14 设 (M,g) 是一个维数 $n \geqslant 3$ 的紧致黎曼流形, ρ 是一个正实数. 考虑一个实数序列 $\varepsilon_k \in (0,1]$, 使得 $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$. 对每个 k, 定义一个泛函 $\mathscr{F}_k$ 为

$$\mathscr{F}_k(\psi) = \int_M \left(|d\psi|_g^2 + \frac{1}{4}\mathrm{scal}_g\psi^2 - \frac{1}{2}\rho\psi^2\log(\varepsilon_k^2 + \psi^2)\right) d\mathrm{vol}_g.$$

(i) 证明存在一个常数 N, 只依赖于 (M,g) 和 ρ, 使得对所有满足 $\int_M \psi^2 d\mathrm{vol}_g = 1$ 的函数 $\psi \in H^1(M)$, 有

$$\mathscr{F}_k(\psi) \geqslant \frac{1}{2}\int_M |d\psi|_g^2 d\mathrm{vol}_g - N.$$

(ii) 对每个 k, 存在一个非负函数 $\varphi_k \in H^1(M)$, 使得 $\int_M \varphi_k^2 d\mathrm{vol}_g = 1$,

$$\mathscr{F}_k(\varphi_k) = \inf\left\{\mathscr{F}_k(\psi) : \psi \in H^1(M), \int_M \psi^2 d\mathrm{vol}_g = 1\right\}.$$

(iii) 设

$$\mu_k = \mathscr{F}_k(\varphi_k) + \frac{1}{2}\rho\int_M \frac{\varepsilon_k^2}{\varepsilon_k^2 + \varphi_k^2}\varphi_k^2 d\mathrm{vol}_g.$$

证明 φ_k 是下述方程的光滑解:

$$\Delta_g\varphi_k = \left(\frac{1}{4}\mathrm{scal}_g - \frac{1}{2}\rho\log(\varepsilon_k^2 + \varphi_k^2) + \frac{1}{2}\rho\frac{\varepsilon_k^2}{\varepsilon_k^2 + \varphi_k^2} - \mu_k\right)\varphi_k.$$

(iv) 证明: 如果有必要的话可以选取子列, 则序列 μ_k 收敛到一个实数 μ, 并且序列 φ_k 一致收敛于一个非负函数 $\varphi \in C^0(M)$.

(v) 假设 p 是 M 上一个点, 满足 $\varphi(p)=0$. 记 $\Gamma(x)=d(p,x)^{2-n}$, 其中 $d(p,x)$ 是到 p 点的黎曼距离. 证明当 $r>0$ 充分小时,

$$\begin{aligned}&(n-2)r^{1-n}\int_{\partial B(p,r)}\varphi d\sigma_g\\ =&-\int_{B(p,r)}\varphi\Delta_g\Gamma d\mathrm{vol}_g\\ &+\int_{B(p,r)}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{scal}_g-\rho\log\varphi-\mu\right)\varphi(\Gamma-r^{2-n})d\mathrm{vol}_g.\end{aligned}$$

(vi) 假设 p 是 M 上一个点, 使得 $\varphi(p)=0$. 记 $u(r)$ 为 φ 在测地球 $\partial B(p,r)$ 上的平均值. 证明当 $r>0$ 充分小时,

$$u(r)\leqslant C\int_0^r|\log u(s)|u(s)ds.$$

由此知道, 当 $r>0$ 充分小时, $u(r)=0$.

(vii) 证明函数 φ 是严格正的. 由此可知函数 φ_k 在 $C^\infty(M)$ 中收敛到 φ.

问题 15 这个问题的目的是证明任意紧致 Ricci 孤立子一定是梯度 Ricci 孤立子. 这个结果首先是由 G. Perelman [68] 给出的. 设 (M,g) 是一个维数 $n\geqslant 3$ 的紧致黎曼流形, ρ 是一个正实数. 由上一个问题, 我们可以找到一个实数 μ 和一个正函数 $\varphi\in C^\infty(M)$, 使得

$$\Delta_g\varphi=\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{scal}_g-\rho\log\varphi-\mu\right)\varphi.$$

(i) 考虑张量 $H=\mathrm{Ric}_g+D^2f-\rho g$, 其中 $f=-2\log\varphi$. 证明

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij}D_j(e^{-f}H_{ik})=0.$$

(ii) 假设存在向量场 ξ, 使得 $\mathrm{Ric}_g+\dfrac{1}{2}\mathscr{L}_\xi g=\rho g$. 证明

$$\sum_{i,j,k=1}^n g^{ij}D_j(e^{-f}H_{ik}(\partial^k f-\xi^k))=e^{-f}|H|^2.$$

由此知道 $H=0$.

问题 16 设 (M, g) 是一个梯度 Ricci 孤立子. 那么存在一个实数 ρ 和一个光滑函数 $f : M \to \mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{Ric}_g + D^2 f = \rho g$. 证明

$$2\,\mathrm{Ric}_{ik}\partial^k f = \partial_i\,\mathrm{scal}\,.$$

(提示: 利用命题 1.5.)



参考文献

[1] D. Alekseevskii, *Riemannian spaces with exceptional holonomy groups*, Functional Anal. Appl. 2, 97–105 (1968).

[2] M. Anderson, *Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 2, 455–490 (1989).

[3] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in Riemannian spaces*, J. Diff. Geom. 39, 407–431 (1994).

[4] B. Andrews and P. Bryan, *Curvature bounds by isoperimetric comparison for normalized Ricci flow on the two-sphere*, arxiv: 0908. 3606.

[5] B. Andrews and H. Nguyen, *Four-manifolds with* 1/4-*pinched flag curvatures*, Asian J. Math. 13, 251–270 (2009).

[6] J. Bartz, M. Struwe, and R. Ye, *A new approach to the Ricci flow on* S^2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie IV, 21, 475–482 (1994).

[7] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogènes des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France 283, 279–330 (1955).

[8] M. Berger, *Les variétés Riemanniennes* 1/4-*pincées*, Ann. Scuola Norm. Sup.

Pisa Serie III, 14, 161–170 (1960).

[9] M. Berger, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées*, Bull. Soc. Math. France 88, 57–71 (1960).

[10] M. Berger, *Sur quelques variétés d'Einstein compactes*, Ann. Mat. Pura Appl. 53, 89–95 (1961).

[11] M. Berger, *Sur les variétés d'Einstein compactes*, Comptes Rendus de la IIIe Réunion du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine (Namur, 1965), 35–55, Librairie Universitaire, Louvain (1966).

[12] M. Berger, *Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 263, A76–A78 (1966).

[13] A. Besse, *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (2008).

[14] C. Böhm and B. Wilking, *Manifolds with positive curvature operator are space forms*, Ann. of Math. (2) 167, 1079–1097 (2008).

[15] J.M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19, 277–304 (1969).

[16] C.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York (1993).

[17] S. Brendle, *A general convergence result for the Ricci flow in higher dimensions*, Duke Math. J. 145, 585–601 (2008).

[18] S. Brendle, *A generalization of Hamilton's differential Harnack inequality for the Ricci flow*, J. Diff. Geom. 82, 207–227 (2009).

[19] S. Brendle, *Einstein manifolds with nonnegative isotropic curvature are locally symmetric*, Duke Math. J. 151, 1–21 (2010).

[20] S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. 22, 287–307 (2009).

[21] S. Brendle and R. Schoen, *Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures*, Acta Math. 200, 1–13 (2008).

[22] S. Brendle and R. Schoen, *Sphere theorems in geometry*, Surveys in Differential Geometry, vol. XIII, 49–84, International Press, Somerville MA (2009).

[23] R.B. Brown and A. Gray, *Riemannian manifolds with holonomy group* Spin(9), Differential Geometry (in Honor of K. Yano), 41–59, Kinokuniya, Tokyo (1972).

[24] H.D. Cao, *On Harnack's inequalities for the Kähler-Ricci flow*, Invent. Math. 109, 247–263 (1992).

[25] A. Chang, M. Gursky, and P. Yang, *A conformally invariant sphere theorem in four dimensions,* Publ. Math. IHÉS 98, 105–143 (2003).

[26] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, AMS Chelsea Publishing, Providence RI (2008).

[27] J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 6, 119–128 (1971).

[28] H. Chen, *Pointwise* 1/4-*pinched* 4-*manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. 9, 161–176 (1991).

[29] X. Chen, P. Lu, and G. Tian, *A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow,* Proc. Amer. Math. Soc. 134, 3391–3393 (2006).

[30] B. Chow, *The Ricci flow on the* 2-*sphere*, J. Diff. Geom. 33, 325–334 (1991).

[31] B. Chow and L.F. Wu, *The Ricci flow on compact* 2-*orbifolds with curvature negative somewhere*, Comm. Pure Appl. Math. 44, 275–286 (1991).

[32] D. DeTurck, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*, J. Diff. Geom. 18, 157–162 (1983).

[33] J. Eells, Jr., and J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86, 109–160 (1964).

[34] J.-H. Eschenburg, *Local convexity and nonnegative curvature – Gromov's proof of the sphere theorem*, Invent. Math. 84, 507–522 (1986).

[35] A. Fraser, *Fundamental groups of manifolds with positive isotropic curvature*, Ann. of Math. (2) 158, 345–354 (2003).

[36] M.H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. 17, 357–453 (1982).

[37] S. Goldberg and S. Kobayashi, *Holomorphic bisectional curvature*, J. Diff. Geom. 1, 225–233 (1967).

[38] D. Gromoll, *Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären*, Math. Ann. 164, 353–371 (1966).

[39] M. Gromov, *Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures*, Functional Analysis on the Eve of the 21st Century, vol. II (New Brunswick 1933), 1–213, Progr. Math., 132, Birkhäuser, Boston (1996).

[40] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. 79, 121–138 (1957).

[41] K. Grove, H. Karcher, and E. Ruh, *Jacobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with an application to differentiable pinching problems*, Math. Ann. 211, 7–21 (1974).

[42] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. (2) 106, 201–211 (1977).

[43] M. Gursky and C. LeBrun, *On Einstein manifolds of positive sectional curvature*, Ann. Global Anal. Geom. 17, 315–328 (1999).

[44] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature* , J. Diff. Geom. 17, 255–306 (1982).

[45] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Diff. Geom. 24, 153–179 (1986).

[46] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Contemp. Math. 71, 237–262, Amer. Math. Soc., Providence RI (1988).

[47] R. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Diff. Geom. 37, 225–243 (1993).

[48] R. Hamilton, *An isoperimetric estimate for the Ricci flow on the two-sphere*, Modern Methods in Complex Analysis (Princeton 1992), 191–200, Ann. of Math. Stud. 137, Princeton University Press, Princeton NJ (1995).

[49] R. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Differential Geometry, vol. II, 7–136, International Press, Somerville MA (1995).

[50] R. Hamilton, Lectures given at Harvard University (1996).

[51] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. 5, 1–92 (1997).

[52] R. Hamilton, *Three-orbifolds with positive Ricci curvature*, Collected Papers on Ricci flow, 521–524, Ser. Geom. Topol. 37, International Press, Somerville MA (2003).

[53] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York (1962).

[54] G. Huisken, *Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold*, J. Diff. Geom. 21, 47–62 (1985).

[55] T. Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds,* Diff. Geom. Appl. 3, 301–307 (1993).

[56] W. Klingenberg, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung,* Comment. Math. Helv. 35, 47–54 (1961).

[57] C. Margerin, *Pointwise pinched manifolds are space forms*, Geometric Measure Theory and the Calculus of Variations (Arcata 1984), 307–328, Proc. Sympos. Pure Math. 44, Amer. Math. Soc., Providence RI (1986).

[58] C. Margerin, *A sharp characterization of the smooth* 4*-sphere in curvature terms*, Comm. Anal. Geom. 6, 21–65 (1998).

[59] D. Meyer, *Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 272, A482–A485 (1971).

[60] M. Micallef and J.D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. (2) 127, 199–227 (1988).

[61] M. Micallef and M. Wang, *Metrics with nonnegative isotropic curvature*, Duke Math. J. 72, 649–672 (1993).

[62] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) 64, 399–405 (1956).

[63] R. Müller, *Differential Harnack inequalities and the Ricci flow*, European Mathematical Society, Zürich (2006).

[64] H. Nguyen, *Isotropic curvature and the Ricci flow,* Internat. Math. Res. Notices no. 3, 536–558 (2010).

[65] S. Nishikawa, *Deformation of Riemannian metrics and manifolds with bounded curvature ratios,* Geometric Measure Theory and the Calculus of Variations (Arcata 1984), 343–352, Proc. Sympos. Pure Math. 44, Amer. Math. Soc., Providence RI (1986).

[66] C. Olmos, *A geometric proof of the Berger holonomy theorem,* Ann. of Math. (2) 161, 579–588 (2005).

[67] B. Osgood, R. Phillips, and P. Sarnak, *Extremals of determinants of Laplacians,* J. Funct. Anal. 80, 148–211 (1988).

[68] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arxiv: 0211159.

[69] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arxiv: 0303109.

[70] P. Petersen and T. Tao, *Classification of almost quarter-pinched manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 137, 2437–2440 (2009).

[71] H.E. Rauch, *A contribution to differential geometry in the large,* Ann. of Math. (2) 54, 38–55 (1951).

[72] E. Ruh, *Krümmung und differenzierbare Struktur auf Sphären* II, Math. Ann. 205, 113–129 (1973).

[73] E. Ruh, *Riemannian manifolds with bounded curvature ratios,* J. Diff. Geom. 17, 643–653 (1982).

[74] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. 67, 143–171 (1982).

[75] R. Schoen and S.T. Yau, *Lectures on Harmonic Maps*, International Press, Cambridge (1997).

[76] H. Seshadri, *Manifolds with nonnegative isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. 17, 621–635 (2009).

[77] N. Šešum, *Curvature tensor under the Ricci flow*, Amer. J. Math. 127, 1315–1324 (2005).

[78] W.X. Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 30, 223–301 (1989).

[79] J. Simons, *On the transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math. (2) 76, 213–234 (1962).

[80] Y.T. Siu and S.T. Yau, *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature*, Invent. Math. 59, 189–204 (1980).

[81] S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. (2) 74, 391–406 (1961).

[82] M. Struwe, *Curvature flows on surfaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie V, 1, 247–274 (2002).

[83] M. Sugimoto, K. Shiohama, and H. Karcher, *On the differentiable pinching problem*, Math. Ann. 195, 1–16 (1971).

[84] S. Tachibana, *A theorem on Riemannian manifolds with positive curvature operator*, Proc. Japan Acad. 50, 301–302 (1974).

[85] P. Topping, *Lectures on the Ricci Flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[86] L.F. Wu, *The Ricci flow on 2-orbifolds with positive curvature*, J. Diff. Geom. 33, 575–596 (1991).

[87] D. Yang, *Rigidity of Einstein 4-manifolds with positive curvature*, Invent. Math. 142, 435–450 (2000).



索引

Ricci 流理论是微分几何的热点之一。利用 Ricci 流，Hamilton 证明了任何紧致的具有正 Ricci 曲率的三维流形一定微分同胚于空间球形式。从那时起，Ricci 流就被用来解决在黎曼几何和三维拓扑中长时间未被解决的公开问题。

本书主要研究在 Ricci 流下黎曼度量的发展方程，特别是高维 Ricci 流的收敛性理论及其在微分球定理方面的应用，并展示了作者在所涉及内容提供的不同的视角及论证。

本书作者 Simon Brendle，德国数学家。2012年获得第六届欧洲数学会奖，用以表彰他在几何偏微分方程以及椭圆、双曲、抛物线型系统方面的杰出贡献。

本书为作者在苏黎世联邦理工学院开设的一个文凭课程的讲义，可作为数学研究生教材，也可作为年轻科研人员的参考书。

■ 学科类别：数学


ISBN 978-7-04-039058-2

9 787040 390582 >

定价 59.00 元

网址：academic.hep.com.cn